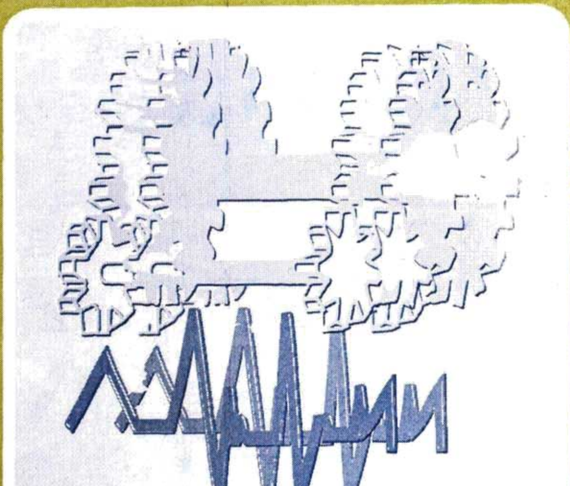
14

Energías mecánica y eléctrica

Francisco Medina Nicolau
Juan Quintanilla



Básicas

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Energías mecánica
y eléctrica

Energías mecánica y eléctrica

Francisco Medina Nicolau
Juan Quintanilla

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas

ISBN: 970-654-675-8

Corrección:
Marisela Juárez Capistrán
Ilustración de portada:
Consuelo Quiroz Reyes
Diseño de Portada:
Modesto Serrano Ramírez

Sección de producción
y distribución editoriales
Tel. 5318-9222/9223
Fax. 5318-9222

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180
Col. Reynosa Tamaulipas
Delegación Azcapotzalco
C.P. 02200
México, D.F.

Energías mecánica y eléctrica
1a. edición, 1987
2a. edición, 2000
3a. edición, 2004

Impreso en México.

C O N T E N I D O

PRESENTACIÓN

Las páginas que siguen tienen por objeto auxiliar al estudiante en el curso de Energías Mecánica y Eléctrica. La amplitud y la profundidad con que deberá tratarse cada tema están determinados por los objetivos correspondientes, el material de estudio y los problemas propuestos. Podrá recurrirse a los textos indicados en las referencias bibliográficas para conocer el desarrollo detallado de algún tema o el análisis de ejemplos particulares o de otros problemas que deseen resolverse.

Esta guía se encuentra dividida en cuatro unidades y cada una de ellas en un número variable de secciones. En cada una de las unidades se incluyen los objetivos, el material de estudio las referencias bibliográficas y los problemas. Antes de cada unidad se indica el nombre de los profesores que la prepararon. Responsable de la elaboración de esta guía fué el Dr. Francisco Medina y junto con el Dr. Juan Quintanilla se llevó al cabo la edición final.

UNIDAD 1: LEYES DEL MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

1.1 Segunda ley y condiciones iniciales;

1.2 Fuerza con dirección constante;

1.3 Fuerza centrípeta;

1.4 Problemas.

Preparó: Pedro Pereyra (Teoría) y Violeta Gaftoi (Problemas)

Referencias:

U Haber - Schaim, JB Cross, JH Dodge y JA Walter, PSSC Física, tercera edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1975. CApítulos 10, 11 y 12.

D Halliday y R Resnick, Fundam :os de Física, CECSA, México, 1978. Capítulos 3, 4 y 5.

S Gartenhaus. F .cana, México, 1979. Capítulos 2, 3, 4 y 5

1.1. Segunda ley y condiciones iniciales,

1. Definir sistema inercial de referencia;
2. Definir vector de posición en dos dimensiones;
3. Definir desplazamiento y velocidad media;
4. Definir velocidad instantánea;
5. Formular la ley de movimiento.

1. Cuando se pregunta cuál es la posición de un cuerpo, no siempre es fácil dar una respuesta precisa. El procedimiento normal es señalar sus coordenadas con respecto a un sistema de referencia. Sin embargo, aún queda el problema de aclarar cuál o cuáles son las propiedades que caracterizan al sistema que está tomado como sistema de referencia. La definición de los sistemas de referencia será nuestro punto de partida en el estudio del movimiento de los cuerpos. Empecemos recordando a los llamados sistemas de referencia inerciales.

¿Cómo se definen los sistemas de referencia inerciales? En general, diremos que un sistema de referencia S, es inercial si un observador fijo en él advierte que:

a) el centro de masa de un sólido rígido mantiene su estado de reposo o movimiento rectilineo con velocidad constante cuando el sólido está aislado o la suma de la fuerza que actúan sobre él es cero.

b) Un sólido plano permanece sin girar o girando uniformemente alrededor de su centro de masa cuando la suma de los momentos de los pares sea igual a cero.

En particular, un cuerpo puntual aislado o bajo la acción de fuer zas cuya suma es igual a cero, persistirá en su estado de reposo o de movimiento rectilineo uniforme con respecto a un observador fijo en un sistema inercial. Esta propiedad de los cuerpos que se manifiesta como tendencia a conservar su estado de movimiento se llama inercia.

Dicho en pocas palabras, un sistema inercial es aquel desde el cual se observa que un cuerpo exento de la acción de fuerzas y momentos conserva su estado de movimiento. En oposición, si de un sistema S' se observa que un cuerpo libre de la acción de fuerzas y momentos cambia su estado de movimiento, entonces S' no es un sistema inercial.

¿Existe un único sistema inercial? No. Supongamos que el sistema S es un sistema inercial, entonces, un cuerpo aislado y en reposo con respecto a él, permanecerá en estado de reposo. Imaginemos ahora un sistema S_1, que se mueve rectilínea y uniformemente, con respecto al sistema inercial S. Para un observador situado en S_1, el cuerpo no estará en reposo, pero si en movimiento rectilineo y uniforme y en ese estado permanecerá para el observador de S_1. Por lo tanto este sistema es también un sistema inercial. En suma, todo sistema que se mueva con velocidad constante con respecto a otro inercial es también un sistema inercial.

¿Cuáles son los sistemas de coordenadas admisibles? Una vez definidas las condiciones que deberá satisfacer un sistema de referencia, es necesario sugerir en qué cuerpos o sistemas de coordenadas, un cuerpo suficientemente alejado de otros cuerpos, persiste en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme. Los sistemas a los cuales se les puede considerar, con gran aproximación sistemas de referencia inerciales, son aquellos que se en cuentran fijos con respecto a las estrellas lejanas

2. Sea S un sistema inercial de coordenadas al cual se van a referir los cuerpos y los acontecimientos que ocurran en el espacio físico. Por sencillez se considerará un espacio bidimensional; la generalización al espacio tridimensional es inmediata.
La posición de un cuerpo puntual, con respecto a un sistema S, queda bien definido señalando las coordenadas del punto que representa al cuerpo, es decir, mediante el par ordenado (x,y). Alternativamente, se define la posición de un cuerpo por medio de su vector de posición.

$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ (1)

donde x e y son precisamente las coordenadas del punto. En general, las coordenadas cambiarán al transcurrir el tiempo, esto es, serán funciones del tiempo t. Consiguientemente, el vector de posición será también una función del tiempo y se escribirá así:

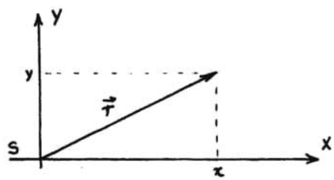


Figura 1.

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} \qquad (2)$$

3. Diremos que un cuerpo se encuentra en movimiento con respecto a un sistema de referencia dado, si su vector de posición, definido en dicho sistema, cambia al transcurrir el tiempo.
Supongamos que la posición inicial de un cuerpo, en el instante t_0, está definida por el vector de posición $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$, mientras que su posición en un instante posterior t, está definida por el vec

tor $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Si estos dos vectores son iguales, el cuerpo pudo o no estar en reposo. Pero si no son iguales, admitimos que el cuerpo se movió de un punto a otro, por ejemplo de P_0 a P en la figura 2. Adviértase que $\vec{r}_0$ y $\vec{r}$ señalan, únicamente, las posiciones en los instantes t_0 y t. El vector $\Delta\vec{r}$ que tiene por origen al punto P_0 y por extremo al punto P, se denomina al vector de desplazamiento. Si bien este vector representa el desplazamiento total, no necesariamente representa a la trayectoria seguida por el cuerpo. Obsérvese que

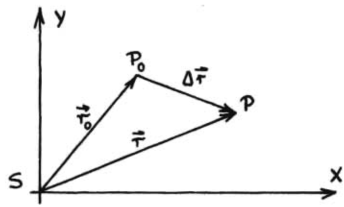


Figura 2

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0), \tag{3}$$

y que el tiempo en que se produjo este desplazamiento es

$$\Delta t = t - t_0 \tag{4}$$

Se define la velocidad media $\bar{\vec{v}}$, como el cociente entre el vector de desplazamiento y el tiempo transcurrido. Así

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{5}$$

más explicitamente

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} \tag{5'}$$

De acuerdo con ésta definición de velocidad media, resulta que si un cuerpo se mueve de tal forma que su posición en el instante t es igual a su posición en el instante t_0, es decir, que si se mueve de tal forma que $\vec{r}(t_0) = \vec{r}(t)$, entonces su velocidad media será cero.

Esto se debe, naturalmente, a la forma en que se definió la velo cidad media, Para determinar su valor, solamente intervinieron las posiciones inicial y final, y el tiempo total transcurrido. Se ignora, absolutamente, todo lo que hubiere ocurrido en las situaciones intermedias. Ciertamente, si las posiciones en los instantes extremos coinciden, la velocidad media no puede ser sino cero, aún cuando en los instantes intermedios el cuerpo hubiese ocupado otras posiciones. Esto es así porque estas últimas no aparecen en la expresión que determina el valor de la velocidad media. A modo de aclaración conviene señalar que existe también el concepto de rapidez media cuyo valor se obtiene del cociente entre la longitud de la trayectoria recorrida por un cuerpo y el tiempo transcurrido. Así puede darse el caso de que mientras el vector velocidad media es cero, la rapidez media no lo es, pues si un cuerpo se mueve puede ocurrir que $\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$, aunque la longitud de la trayectoria recorrida sea distinta de cero.

4. Es posible que se presenten situaciones en las que sea necesario conocer la velocidad de un cuerpo en algún instante de tiempo. El concepto de velocidad instantánea se puede establecer muy claramente a partir del concepto de velocidad media. De hecho, la velocidad instantánea no es otra cosa que una velocidad media calculada para un intervalo de tiempo tan reducido que, prácticamente, se puede considerar un instante. Supongamos que la trayectoria seguida por un cuerpo es como se muestra en la gráfica de la figura 3. Sea $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$, el vector de posición en un instante t_1, y $\vec{r} = \vec{r}(t)$ el vector de posición en un instante $t = t_1 + \Delta t$. Si hacemos que el instante t sea muy próximo a t_1, es claro que la magnitud del vector $\Delta\vec{r}$ se hace muy pequeña, su dirección tiende a coin

cidir con la dirección de la tangente a la trayectoria en el punto P_1, y la velocidad media $\bar{\vec{v}}$ para el intervalo $\Delta t = t - t_1$, se convierte, para todo fin práctico, en la velocidad $\vec{v}(t_1)$ del instante t_1.

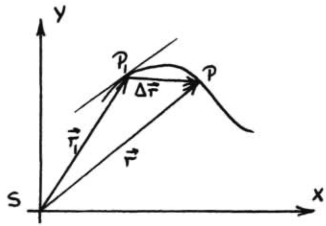


Figura 3.

De lo que se acaba de decir, se concluye que la velocidad del instante t_1, se define como

$$\vec{v}(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_1 + \Delta t) - \vec{r}(t_1)}{\Delta t} \tag{6}$$

El límite no es otra cosa que la derivada con respecto al tiempo del vector r(t), evaluado en $t = t_1$, es decir que

$$\vec{v}(t_1) = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t = t_1} \tag{7}$$

En general, la velocidad en un instante t cualquiera esta definida por la expresión

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \tag{8}$$

De esta forma, el vector velocidad instantánea se determina derivando el vector de posición $\vec{r}(t)$ con respecto al tiempo. Por esto, el vector $\vec{v}(t)$ es, en cada punto, tangente a la trayectoria del cuerpo.

Si tenemos en cuenta que $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ y, además, que el vector $\vec{v}(t)$ puede considerarse como la suma de sus componentes, la ecuación (8) toma la forma

$$v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} \tag{9}$$

Equivalentemente, se tiene el par de ecuaciones escalares:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \tag{10a}$$

y

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} \tag{10b}$$

que proveen los valores de las componentes del vector $\vec{v}(t)$. Es claro que si el movimiento es unidimensional, se hará coincidir con la dirección del movimiento, ya sea el eje X o el eje Y. De ésta forma, en lugar de las anteriores dos ecuaciones, se tendrá solamente una.

La utilidad de las ecuaciones (10a) y (10b) no se restringe únicamente al cálculo de las componentes de la velocidad $\vec{v}$; pueden también ser usadas en sentido inverso, esto es, para determinar, a partir del conocimiento del vector $\vec{v}(t)$, las componentes $x(t)$ e $y(t)$ del vector de posición $\vec{r}(t)$. Este proceso implica la integración de las ecuaciones (10a) y (10b) y el conocimiento previo de los valores de $\vec{v}(t)$ en todo tiempo, y de $\vec{r}(t)$ en un instante inicial t_0. Este problema se tratará un poco más adelante.

¿Qué valores podrá tomar la velocidad instantánea? Consideremos, en primer lugar, las situaciones físicas en las que el cuerpo en cuestión está libre de la acción de fuerzas o que la resultante de las que sobre él actúan es igual a cero. Se sabe, en este caso, que para todo observador situado en un sistema de referencia inercial, el estado de movimiento o de reposo del cuerpo permanecerá inalterado, Significa esto que la velocidad es constante. Su valor en un instante debe ser el mismo que en cualquier otro, y la representación gráfica de la magnitud de la velocidad como función del tiempo es como se muestra en la figura 4. No es difícil concluir que, en estas condicio

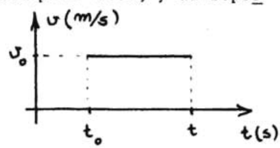


Figura 4

nes, las velocidades instantánea y media son iguales.

Supongamos ahora que el cuerpo puntual, inicialmente libre de fuerzas y, por lo tanto, en un estado de reposo o de movimiento rectilíneo, comienza, en algún instante de tiempo, a "sentir" la acción de una o más fuerzas externas cuya resultante sea distinta de cero. La consecuencia de esta interacción se manifestará como una tendencia por modificar el estado de movimiento del cuerpo. Es decir, como una tendencia a cambiar la velocidad del cuerpo según la dirección de la fuerza. Con relación a esto cabe aclarar que por la naturaleza material de los cuerpos, el valor de la variación en la velocidad no sólo dependerá del valor de la fuerza que actúa sobre él y del tiempo durante el cual está sometido a la acción de dicha fuerza, sino también de una propiedad de los cuerpos que se manifiesta como una tendencia por persistir en su estado de movimiento. Esta propiedad es la masa del cuerpo. En este sentido, la masa no es otra cosa que la medida de la inercia de un cuerpo, razón por la cual se le llama también masa inercial.

En suma, un cuerpo sometido a la acción de una fuerza resultante distinta de cero, experimentará cambios en su velocidad.

Mientras se mantenga la fuerza, la velocidad no será más una constante. Su valor se modificará al transcurrir el tiempo.

5. Todos, en mayor o menor medida, estamos familiarizados con las fuerzas mediante las cuales unos y otros objetos de nuestra realidad interaccionan entre sí. Tenemos por lo menos, una noción intuitiva de ellas. Sabemos que las fuerzas son de naturaleza vectorial. La experiencia diaria nos enseña que el efecto de una fuerza depende en realidad de su magnitud, dirección y sentido, indepen

dientemente de la naturaleza específica de la fuerza. No esta de más mencionar que la fuerza que actúa sobre un objeto proviene de algún otro que interacciona con él. Una vez manifestada la interacción a través de una fuerza $\vec{F}$, esperamos que el estado de movimiento del cuerpo se modifique. Por otra parte, todos sabemos que una misma fuerza no produce el mismo efecto sobre un cuerpo en el que la cantidad de materia contenida es pequeña, digamos una canica, que sobre otro en el que el agregado de materia es grande, por ejemplo una locomotora. Resulta, entonces, que la magnitud de la resistencia que ofrece un cuerpo al cambio en su estado de movimiento, o sea, su masa inercial, es directamente proporcional a la cantidad de materia contenida en el cuerpo.

Supongamos ahora que como consecuencia de la acción de una fuerza, la velocidad de un cuerpo de masa inercial m, cambia desde el valor $\vec{v}_0$ en el instante t_0. hasta el valor $\vec{v}$ en el instante t.

En función de lo expresado líneas arriba, estamos en condiciones de afirmar que

$$\Delta\vec{v} \propto \vec{F}, \quad \vec{F} \text{ constante} \qquad (11a)$$

$$\Delta\vec{v} \propto \Delta t \qquad (11b)$$

$$\Delta\vec{v} \propto \frac{1}{m} \qquad (11c)$$

No existiendo ningún otro factor que afecte al cambio en la velocidad, se tiene la siguiente igualdad.

$$\Delta\vec{v} = \frac{\vec{F}\,\Delta t}{m} \qquad (12)$$

que se la puede reescribir en la forma

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad (13)$$

donde el cociente entre el cambio en la velocidad y el tiempo transcurrido es la aceleración media del cuerpo. Si la denotamos por $\bar{\vec{a}}$, se tiene

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{14}$$

Se puede también definir la aceleración instantánea $\vec{a}$, que considerada como aceleración media evaluada para un intervalo de tiempo que tiende a cero, está dada por la relación

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{15}$$

Si recordamos que $\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j}$ y, además, expresamos la aceleración como la suma de sus vectores componentes, la ecuación (15), toma la forma

$$a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j} = \frac{dv_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\hat{j} \tag{16}$$

de la que se obtien las ecuaciones escalares correspondientes

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} \tag{17}$$

y

$$a_x(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} \quad , \tag{17b}$$

ecuaciones que nos permiten determinar las componentes del vector aceleración $\vec{a}$. Alternativamente, pueden utilizarse para calcular las componentes $v_x(t)$ y $v_y(t)$, cuando se conocen la aceleración $\vec{a}(t)$ para todo tiempo y $\vec{v}(t)$ para un tiempo inicial t_0. Para esto se requiere integrar las ecuaciones (17a) y (17b). Nos ocuparemos de esto, en la sección que sigue.

Retornemos a la ecuación (13), la que, teniendo en cuenta la ecuación (14), se puede reescribir en la siguiente forma

$$\vec{\bar{a}} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad (18)$$

Tanto esta última ecuación como la (13) son la expresión formal de la segunda Ley de Newton, según la cual, la aceleración o rapidez de variación de la velocidad que experimenta un cuerpo puntual, o su centro de masa, si éste es rígido, es directamente proporcional a la fuerza que actúa sobre el cuerpo e inversamente proporcional a su masa inercial.

De igual forma, se puede escribir una relación que exprese la aceleración instantánea como función de la fuerza que en ese momento experimenta el cuerpo. Esta es análoga a la ecuación (18) y tiene la forma

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad (19)$$

En muchas situaciones físicas de interés, las fuerzas son aproximadamente constantes. En tal caso, las aceleraciones instantánea y media son constantes e iguales. Un ejemplo de esto es la fuerza gravitacional que se supone aproximadamente constante mientras se consideren puntos del espacio físico cuyas distancias al centro de atracción gravitacional no difieran mucho.

1.2. Fuerza con dirección constante;

1. Integrar la ecuación de movimiento;
2. Analizar el movimiento de una partícula cuando la dirección de la fuerza es constante en los siguientes casos:

2a. La velocidad es paralela a la fuerza;

2b. La velocidad no es paralela a la fuerza.

1. Con la teoría expuesta anteriormente, estamos en condiciones de describir el movimiento de los cuerpos, con respecto a un sistema de referencia dado. En este sentido, el procedimiento, para determinar los valores de las variables físicas, puede consistir, ya sea en seguir el orden indicado en el esquema que a continuación se muestra, y que requiere realizar las operaciones de deri-

$$\boxed{\vec{r}(t)} \longrightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}} \longrightarrow \boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}} \longrightarrow \boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

vación o simple substitución, o, alternativamente, proceder en orden inverso al indicado en el esquema. En particular, es posible describir el movimiento a partir del conocimiento de la fuerza que se ejerce sobre un cuerpo, además, de las condiciones que caracterizan su movimiento en un instante inicial.

Ahora, nos ocuparemos del estudio y caracterización del movimiento de los cuerpos que están sometidos a la acción de una fuerza conocida. Estableceremos algunas conclusiones y expresiones generales acerca del movimiento del cuerpo en base a un rápido análisis de las ecuaciones que ya se conocen.

Según la ecuación (13) el vector $\Delta\vec{v}$ que está definido en la forma

$$\Delta\vec{v} = \frac{\Delta t}{m}\ \vec{F}$$

es un múltiplo del vector $\vec{F}$ por lo tanto ambos son paralelos. La magnitud de $\Delta\vec{v}$ es $\frac{\Delta t}{m}$ veces la magnitud de $\vec{F}$. Igualmente, puesto que

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} , \qquad (19')$$

la aceleración $\vec{a}$ resulta ser un vector paralelo a la fuerza $\vec{F}$. Su valor se obtiene con sólo dividir la fuerza $\vec{F}$ por la masa m del cuerpo. El que la variación en la velocidad $\Delta\vec{v}$, y la aceleración $\vec{a}$, sean vectores paralelos a la fuerza que actúa sobre el cuerpo, es muy claro. Sin embargo, ¿Qué podremos afirmar con relación al vector de velocidad $\vec{v}$ en un instante de tiempo t cualquiera? Esta vez, la respuesta no puede ser inmediata, además de la fuerza $\vec{F}$, en términos de la cual estan ya definidos los vectores $\Delta\vec{v}$ y $\vec{a}$, es preciso conocer el vector velocidad $\vec{v}_0$ en un instante de tiempo t_0 anterior, o sea es necesario conocer las condiciones iniciales del movimiento.

Tenemos dos alternativas para definir el valor de la velocidad $\vec{v}$. Una de estas es a través del vector $\Delta\vec{v}$. Siendo $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$, resulta que

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \Delta\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m}\Delta t \qquad (20)$$

esta expresión es importante, se advierte aquí que la dirección del vector $\vec{v}$ puede o no ser la misma que la del vector $\vec{v}_0$, dependiendo de si el vector $\Delta\vec{v}$ es o no colineal con $\vec{v}_0$. La otra alternativa es a través de la expresión

$$d\vec{v} = \vec{a}\,dt = \frac{\vec{F}}{m}dt$$

que integrada entre t_0 y t, toma la forma

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}\,dt = \vec{v}_o + \int_{t_0}^{t} \frac{\vec{F}}{m}dt \qquad (21)$$

Obsérvese que si la fuerza $\vec{F}$ es constante en el tiempo, la última expresión se reduce a la (20). A veces es más comodo el empleo de las ecuaciones escalares

$$v_x(t) = v_{0x} + \int_{t_0}^{t} a_x \, dt = v_{0x} + \int_{t_0}^{t} \frac{F_x}{m} dt \qquad (22a)$$

$$v_y(t) = v_{0y} + \int_{t_0}^{t} a_y \, dt = v_{0y} + \int_{t_0}^{t} \frac{F_y}{m} dt \qquad (22b)$$

ecuaciones que nos permiten calcular las componentes $v_x(t)$ y $v_y(t)$ del vector $\vec{v}(t)$, que de cualquier forma es función de la veloci - dad $\vec{v}_0$ en el tiempo t_0, y de la aceleración $\vec{a}$ (o la fuerza $\vec{F}$). Finalmente, ¿Cómo se determina la posición $\vec{r}(t)$ para un instante t? Nuevamente, se presiente que la posición de un cuerpo en movimiento, no solamente dependerá de la velocidad con que se mueva, velocidad que ya incorpora la información sobre la fuerza, sino también de cuándo y dónde se inició la historia, es decir, de la posición $\vec{r}_0$ en el tiempo t_0. Si recordamos que

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

o equivalentemente las ecuaciones

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \qquad v_y(t) = \frac{dy}{dt}$$

Al integrar entre t y t_0, se obtiene la expresión

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt \qquad (24)$$

o las correspondientes ecuaciones escalares

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x(t)dt \qquad (25a)$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} v_y(t)\, dt \qquad (25b)$$

que con las antes indicadas, nos permitirán determinar los valores de las variables físicas que caracterizaran el movimiento de un cuerpo, las utilizaremos en los casos particulares que aquí se estudiarán.

Son muchos los casos en los que, con buena aproximación, la dirección de la fuerza es o se puede considerar constante. Así la fuerza a que está sometido un cuerpo que se mueve radialmente o en regiones pequeñas (comparadas con las distancias al centro de atracción) de un campo gravitacional, o la fuerza que actúa sobre una carga ligera que se mueve radialmente en el campo eléctrico de una carga puntual, constituyen algunos de los muchos ejemplos en los que las fuerzas tienen dirección constante.

En relación a estas situaciones en los que la dirección de la fuerza es constante, haremos una pequeña digresión del problema para considerar, en primer lugar, aquellas en las que la velocidad inicial y la fuerza son vectores colineales, y después, aquellas otras en las que no son vectores colineales.

2a. En el primer caso, los vectores $\Delta\vec{v}$ y $\vec{v}_0$ también lo son, y la suma $\vec{v}_0 + \Delta\vec{v}$ será igualmente un vector colineal con $\vec{v}_0$. Para visualizar esto, se puede recurrir al siguiente análisis gráfico. Sean los vectores $\vec{v}_0$, $\vec{F}$ y $\Delta\vec{v}$ como se muestran a continuación

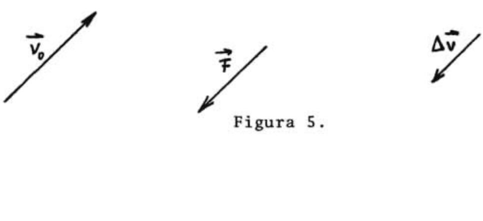


Figura 5.

El vector $\vec{v}$, definido en (20) como la suma $\vec{v}_0 + \Delta\vec{v}$, aparece en la figura que sigue, en la cual se ha efectuado gráficamente la suma.

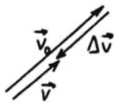


Figura 6

La conclusión importante es que el cuerpo se mueve sobre la misma línea direccional. Todo lo que hace la fuerza es cambiar la magnitud de la velocidad y , en algunos casos, el sentido. Tratándose de un movimiento rectilíneo se acostumbra identificar la dirección del movimiento con uno de los ejes direccionales X o Y, y de esta forma todos los vectores que intervienen tendrán una sola componente y esta será a lo largo del eje direccional considerado. Por lo tanto, es suficiente tomar en cuenta una de las dos ecuaciones escalares, la que corresponde al eje escogido. Así, el estudio de este tipo de movimiento resulta ser más simple.
¿Cuáles y cómo son la aceleración, velocidad y posición de un cuerpo de masa m sometido a la acción de una fuerza que, además de ser colineal con la velocidad inicial del cuerpo, es constante en magnitud? Sea $\vec{v}_0$ la velocidad inicial de un cuerpo de masa m sobre el que en el instante inicial t_0 comienza a actuar una fuerza $\vec{F}$ constante y paralela a la dirección del movimiento inicial.

En primer lugar señalemos que el movimiento será rectilíneo. Por sencillez, haremos coincidir un eje direccional, digamos el X, con la dirección del movimiento.

Antes de proceder a la solución del problema, conviene aclarar que, paralelamente, se mostrarán las representaciones gráficas del comportamiento de las variables (F_x, a_x, v_x, x) como funciones del tiempo. La intención es aprender a visualizar e inferir, con ayuda de las gráficas, algunas características generales del movimiento.

En primer término, tenemos una fuerza constante. Su representación gráfica se muestra en el diagrama fuerza-tiempo de la figura, donde se supuso positiva, es

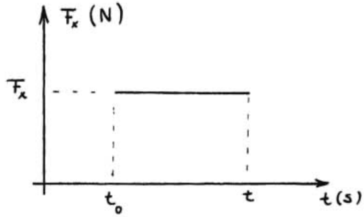


Figura 7.

decir orientada en el sentido en que crecen los valores de la posición x. Naturalmente, que también existen fuerzas negativas, o sea, orientadas en el otro sentido.

Determinar la aceleración es fácil. De acuerdo con la segunda Ley de Newton, su valor está definido por la ecuación

$$a_x = \frac{F_x}{m} \tag{26}$$

El comportamiento de la aceleración a_x debe ser similar al de la fuerza F_x puesto que todo lo que se hace es multiplicar la fuerza por el factor $\frac{1}{m}$ que, a menos que alcance velocidades próximas a la de la luz, es constante. La representación gráfica de la aceleración como función del tiempo, es como se muestra en el diagrama a-t de la figura. Siendo la fuerza positiva, la

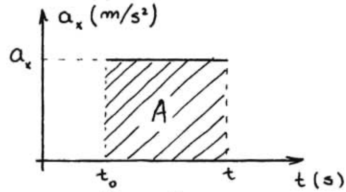


Figura 8.

aceleración es también positiva. En otra parte se señaló ya que el vector aceleración es colineal con la fuerza y orientado en el mismo sentido. Cuando la fuerza sea negativa, la aceleración también será negativa.

Nos toca ahora determinar el valor de la velocidad $v_x(t)$ para un tiempo t cualquiera. Para este propósito, recurrimos ya sea a la ecuación (20) o a la (22), según las cuales

$$v_x(t) = v_{0x} + \Delta v_x \tag{20'}$$

o bien

$$v_x(t) = v_{0x} + \int_{t_0}^{t} a_x(t)dt \tag{22a'}$$

Ambas ecuaciones son absolutamente equivalentes, y, cada una de ellas, la utilizaremos para remarcar aquello que cada cual trasluce mejor. La ecuación (20') pone de manifiesto que la velocidad en cualquier instante se debe concebir como la velocidad inicial más la variación de la velocidad que resulta como consecuencia de la acción de la fuerza desde el instante t_0 hasta el instante t. La ecuación (22a') expresa el cambio en la velocidad en términos de la aceleración que experimenta el cuerpo. Más explícitamente, se pone en evidencia que la variación en la velocidad es precisamente la integral que aparece en (22a'). Si somos capaces de determinar esa variación en la velocidad para todo intervalo de tiempo, es claro que estaremos en condiciones de señalar cuál es el valor de $v_x(t)$, suponiendo que conocemos v_{0x} .

¿Cuál es entonces el valor de la variación de la velocidad? ¿Cómo es esta variación?

Sabemos que

$$\Delta v_x = \int_{t_0}^{t} a_x(t)dt \tag{22a'}$$

en el segundo miembro se tiene la integral de la función $a_x(t)$ entre t_0 y t. Para la situación que estamos considerando, la función es constante. En consecuencia

$$\Delta v_x = a_x \int_{t_0}^{t} dt = a_x(t-t_0) \tag{27}$$

Obsérvese que el producto $a_x(t-t_0)$ es numéricamente igual al área A, que en el diagrama aceleración-tiempo se encuentra limitada por la curva que representa a los valores de la aceleración, el eje del tiempo y las rectas $t = t_0$ y $t = t$. Esto concuerda con la interpretación geométrica (como área) de la integral de una función y sugiere inmediatamente una interpretación geométrica para la variación en la velocidad cualquiera sea la naturaleza de $a_x(t)$: la variación en la velocidad será siempre numéricamente igual al área que se encuentra limitada por la curva que representa a la función $a_x(t)$ y el eje t entre t_0 y t. Algo más, si el área queda por abajo del eje del tiempo (lo que corresponde a aceleración a_x negativa), la variación en la velocidad será negativa.

Para responder a la pregunta ¿Cómo es la variación en la velocidad?, no hay más que realizar una rápida inspección a la expresión obtenida en (27) para aceleración constante. El segundo término de dicha ecuación contiene dos términos: uno de ellos, $a_x t_0$, es constante y el otro, $a_x t$, depende linealmente del tiempo. Esto significa que cuando la aceleración es constante la variación en la velocidad es uniforme, es decir, a intervalos iguales de tiempo corresponden cambios también iguales en la velocidad.

Este comportamiento de la variación de la velocidad se refleja en el de la velocidad $v_x(t)$, que en base al resultado obtenido en (27) está definida por la ecuación

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x(t - t_0), \tag{28}$$

la que nos permitirá evaluar $v_x(t)$ para todo tiempo t posterior a t_0. Obsérvese que, evidentemente, $v_x(t)$ depende linealmente del tiempo, pues la forma de la ecuación (28) corresponde a la ecuación de una recta con pendiente a_x.

En la gráfica del diagrama velocidad-tiempo de la figura 9, se puede ver claramente que

$$\tan\theta = \frac{v_x(t) - v_{0x}}{t - t_0} = a_x \tag{29}$$

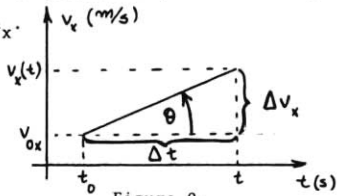


Figura 9.

Esta conclusión es útil cuando conocida la velocidad como función del tiempo, se desea determinar la aceleración. No se contradice la definición $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, puesto que la derivada es precisamente la pendiente de la curva $v_x(t)$. Adviértase, además, que la pendiente es positiva, negativa o cero, dependiendo de si la aceleración es positiva, negativa o cero, respectivamente. Por último, ¿qué se puede decir acerca de las posiciones del cuerpo?. De acuerdo con la ecuación (25a).

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x(t)dt \tag{25a'}$$

Para calcular x(t) será necesario conocer la posición inicial x_0 y, además, evaluar la integral de (25a') que representa la variación Δx en la posición del cuerpo. Si nuevamente recurrimos a la interpretación geométrica de la integral, tenemos que la variación de la posición debe ser numéricamente igual al área que se encuentra entre la curva $v_x(t)$, el eje del tiempo y las rectas $t = t_0$ y $t = t$ del diagrama velocidad-tiempo de la figura 9 , cuyo valor se obtiene sumando el área del rectángulo que es $v_{0x}\Delta t$, más la del triángulo que es $\frac{1}{2}\Delta v_x \Delta t$, de tal forma que

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \quad v_x(t - t_0) \tag{30}$$

y como $\Delta v_x = a_x(t - t_0)$, la ecuación anterior se transforma en

$$x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t) + \frac{1}{2} a_x(t - t_0)^2 \tag{31}$$

Este mismo resultado se podía haber obtenido a partir de (25a') con sólo substituir (28) e integrar. Obsérvese que en un movimiento con aceleración constante, la posición depende cuadráticamente del tiempo.

Finalmente, mencionemos que las expresiones (26), (28) y (31), que nos permiten describir el movimiento, adoptan formas más simples cuando $t_0 = 0$ y $x_0 = 0$. Estas son:

$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Así como se escogió el eje X para hacer coincidir con la dirección del movimiento y de la fuerza que sobre el cuerpo actuaba, pudo también haberse elegido el eje Y, lo que hubiera dado lugar al mismo conjunto de expresiones y consideraciones con la Y, ahí donde aparece la X.

2b. Cuando $\vec{v}_0$ y $\vec{F}$ no son colineales, los vectores $\vec{a}$ y $\Delta\vec{v}$ que siempre son paralelos al vector $\vec{F}$, dejan de ser colineales con el vector $\vec{v}_0$. Este hecho modifica sustancialmente las característi cas del movimiento. Para empezar, la velocidad $\vec{v}(t)$, definida como

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \Delta\vec{v}$$

será, en general, diferente de $\vec{v}_0$, tanto en magnitud como en dirección. El siguiente análisis gráfico ilustra nuestra aseveración. Sean los vectores $\vec{v}_0$, $\vec{F}$ y $\Delta\vec{v}$ como se muestra a continuación.

Figura 10

Si se realiza la suma gráficamente, se tiene

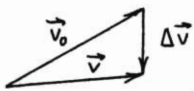


Figura 11

La velocidad $\vec{v}$, es evidentemente, diferente de $\vec{v}_0$, tanto en magnitud como en dirección. Naturalmente, la trayectoria no es rectilínea, sino curvilínea. Si se mantiene la fuerza por un período de tiempo prolongado, la dirección del movimiento del cuerpo, después de este príodo, diferirá muy poco de la dirección de la fuerza. Cuando la dirección de la fuerza permanece constante, se manifiesta un comportamiento muy característico en la variación del vector velocidad, comportamiento que lleva a la conclusión de que la variación en la dirección del vector velocidad es producida por la componente de la fuerza perpendicular al vector velocidad, en tanto que la variación en la magnitud del vector velocidad se debe a la componente de la fuerza en la dirección del vector velocidad. Intentaremos una breve explicación en relación a este hecho. Para simplificar, supongamos que la fuerza $\vec{F}$ tiene, además de su dirección, magnitud constante. De esta forma, a intervalos de tiempo iguales, corresponden variaciones en la velocidad también iguales puesto que $\Delta\vec{v} = \frac{\Delta t}{m}\vec{F}$. Esta última aseveración no contradice las anteriores. Aquellas se refieren a las variaciones en dirección y magnitud, respectivamente.

Sean los vectores $\vec{v}_0$ (velocidad en t_0), $\vec{F}$ y $\Delta\vec{v}$ (variación en la velocidad en el intervalo de tiempo Δt), como se muestra a continuación

Figura 12

Consideremos ahora dos instantes t_i y t_j, posteriores a t_0, con las siguientes características: en t_i el vector $\vec{v}_i$ es aproximadamente perpendicular a $\vec{F}$; en t_j el ángulo entre $\vec{v}_j$ y $\vec{F}$ es menor de 90°. Transcurrido un intervalo de tiempo Δt, después de cada uno de los instantes t_0, t_i y t_j, se obtienen las nuevas velocidades $\vec{v}_1$, $\vec{v}_{i+1}$, $\vec{v}_{j+1}$, de la siguiente forma

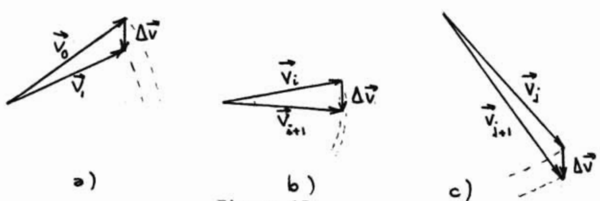


Figura 13

Aunque la variación $\Delta\vec{v}$ es exactamente la misma en (a), (b), y (c), se advierte que en (a) y (c) las variaciones en la magnitud son más apreciables que en (b). Si, por otra parte, se dibujan las componentes de la fuerza normal y paralela a los vectores velocidad, se obtienen las siguientes gráficas.

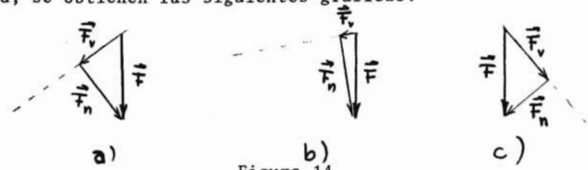


Figura 14

Comparando las gráficas (a), (b) y (c) de la figura 13 con las correspondientes de la figura 14 se hace evidente que la variación en la magnitud del vector es proporcional a la componente $\vec{F}_v$ de la fuerza (en la dirección del vector velocidad), en tanto que el cambio en la dirección es proporcional a la componente $\vec{F}_n$ (en la dirección normal a la velocidad). Al representar los vectores velocidad aplicados en un mismo punto, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 15, en la que se aprecia, por una parte, el comportamiento en las variaciones de la magnitud y dirección y, por la otra, que la proyección de la velocidad en la dirección

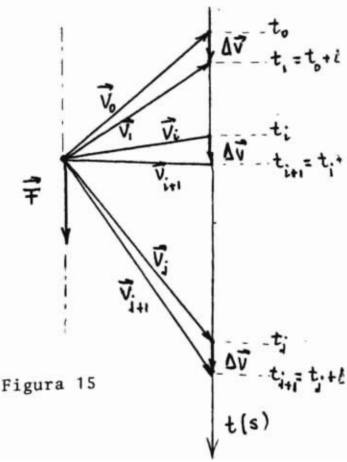


Figura 15

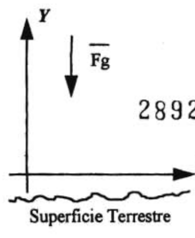
perpendicular a la fuerza F se mantiene constante. Esto confirma algo que ya se afirmó, a saber, que la variación en la velocidad $\Delta\vec{v}$ es paralela a la dirección de la fuerza.

En base a esta última conclusión, es que, cuando se considera el movimiento de un cuerpo sometido a la acción de una fuerza $\vec{F}$ no colineal con la velocidad inicial $\vec{v}_0$, se puede separar el movimiento en dos partes una que ocurre en la dirección de la fuerza, movimiento acelerado y otra en la dirección perpendicular a la fuerza, movimiento no acelerado.

Uno de los ejemplos más característicos de este tipo de movimiento en el que la fuerza tiene, con buena aproximación, dirección y magnitud constantes, y además, no es colineal con $\vec{v}_0$, es el del movimiento de un proyectil bajo la influencia del campo gravitacional terrestre. Estudiaremos con algún detalle este problema.

Supongamos que un cuerpo de masa m es disparado de tal manera que en el instante inicial $t_0 = 0$ s, su velocidad $\vec{v}_0$ tiene una magnitud v_0 y forma un ángulo θ con la superficie terrestre. Describiremos el movimiento de este proyectil, con respecto a un sistema de referencia cartesiano bidimensional coincidente con el plano del movimiento y con el origen situado en el punto de partida del proyectil.

Al estar el cuerpo sometido a la acción de la fuerza gravitacional cuya dirección no necesariamente coincide con la del vector $\vec{v}_0$, su movimiento será acelerado y su trayectoria será curvilínea.



Por el análisis que se hizo líneas arriba, resulta cómodo considerar los ejes direccionales X e Y de tal forma que uno de ellos, digamos el Y, sea paralelo a la dirección de la fuerza gravitacional (supuesta uniforme). Así

$$\vec{F}_g = - F_g\hat{j}$$

Donde F_g = mg, siendo g la magnitud de la aceleración gravitacional cuyo valor en la superficie de la tierra (nivel del mar) es de 9.81 m/s^2.

De acuerdo con la segunda Ley de Newton

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = \frac{\vec{F}}{m} = -g\hat{j}$$

Consiguientemente,

$$a_x = 0, \; a_y = -g$$

La aceleración es constante en el tiempo y no tiene componente en la dirección paralela a la superficie de la Tierra. Subsituyendo los valores de a_x y a_y en (22a) y (22b) respectivamente, se tiene que

$$v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos\theta$$

$$v_x(t) = v_{0y} - g\ t = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt$$

Se hace evidente que mientras la componente v_y del vector velocidad cambia al transcurrir el tiempo, la componente v_x se mantiene constante.

Antes de proseguir con la determinación de la ecuaciones del movimiento que proveen la posición del cuerpo para todo tiempo $t \geq t_0$ nos detendremos un momento para precisar y establecer algunas conclusiones acerca del vector velocidad.

En primer lugar, el vector velocidad definido como $\vec{v}(t) = v_x(t)/\hat{\imath} + v_y(t)j$, toma la forma $\vec{v}(t) = v_0 \cos\theta\, \hat{\imath} + (v_0 \operatorname{sen}\theta - gt)\, \hat{j}$.
En segundo lugar, este vector debe, en todo momento, ser tangente a la trayectoria que siga el cuerpo. Si dibujamos el vector velocidad para algunos puntos de la trayectoria que se muestra en la figura, se advierte que su dirección y magnitud van cambiando co-

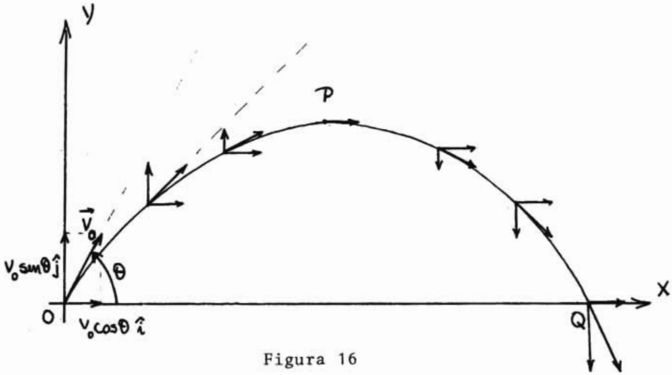


Figura 16

mo consecuencia del cambio que se produce en la componente $\vec{v}_y$. Llega un momento en el que la componente $\vec{v}_y$ es cero, momento en el que el proyectil se encuentra en su punto más alto. Esto ocurre cuando t es tal que

$$v_0 \operatorname{sen}\theta - gt = 0$$

O sea que

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g},$$

es el tiempo que tiene que transcurrir para que el proyectil alcan ce el punto P de su trayectoria. Después de este tiempo, la componente $\vec{v}_y$ crece, pero ahora en el sentido de la fuerza de atracción gravitacional que actúa sobre el proyectil.

Por otra parte, estamos en condiciones de determinar la posición $\vec{r}(t)$ para un tiempo $t \geq t_0$. Haciendo uso de las ecuaciones (25a) y (25b) y teniendo en cuenta los valores obtenidos para $v_x(t)$ y $v_y(t)$ y que $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$, se obtiene

$$x(t) = v_{0x}t = (v_0 \cos\theta)t$$
$$y(t) = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

De manera que el vector de posición está definido por la siguiente ecuación

$$\vec{r}(t) = (v_0 \cos\theta)t\,\hat{i} + \left[(v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2\right]\hat{j}$$

Puede ser interesante conocer, por ejemplo, el tiempo t_Q que transcurre para que el proyectil llegue al punto Q, así como la distancia de separación entre O y Q, es decir, el alcance del proyectil. El tiempo t_Q debe ser tal que la coordenada $y(t)$ evaluada para ese tiempo se anule, es decir

$$y(t_Q) = (v_0 \operatorname{sen}\theta)\, t_Q - \tfrac{1}{2}gt_Q^2 = 0$$

de donde resulta que

$$t_Q = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g},$$

Este tiempo es exactamente el doble del tiempo que transcurre para llegar a P, lo que significa que tarda el mismo tiempo en subir que en bajar hasta el mismo nivel del que partió.

Finalmente señalemos que el alcance no es sino la posición $x(t)$ evaluada en el tiempo $t_Q = \dfrac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$. Por lo tanto

$$x_Q = x(t_Q) = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{g}$$

¿Cómo es la trayectoria en el movimiento de un proyectil? Para responder esta pregunta conviene expresar la coordenada y(t) en términos de la coordenada x(t), lo que se consigue sustituyendo el tiempo

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

en la expresión que define a y(t). Obteniéndose

$$y = (\tan\theta)x - \frac{g\,x^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}$$

que es cuadrática en x, de lo que se concluye que la trayectoria es parabólica.

1.3 Fuerza centrípeta.

1. Definir fuerza centrípeta.
2. Analizar el movimiento circular uniforme.

1. Cuando la fuerza que se ejerce sobre un cuerpo en movimiento no es paralela a la dirección del movimiento, la trayectoria del cuerpo deja de ser rectilínea.

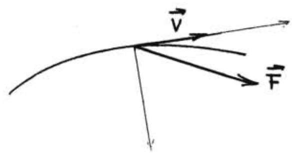


Figura 17

Por otro lado, es siempre posible descomponer la fuerza en dos componenetes: una paralela al vector velocidad (tangente a la trayectoria) y la otra normal al vector de velocidad. Si substituimos a la fuerza por sus componentes, $\vec{F}_v$ y $\vec{F}_n$, no es difícil advertir que la componente de la fuerza que provoca el cambio en la dirección del movimiento es la componente $\vec{F}_n$, normal a la trayectoria del cuerpo en el pun

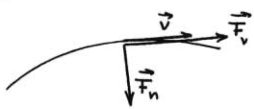


Figura 18

to correspondiente al instante considerado. La fuerza F_n se deno mina fuerza centrípeta: es una fuerza dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria.

Son muchos los ejemplos en los cuales se manifiesta la presencia de una fuerza centrípeta. Entre estos están: el movimiento de los planetas alrededor del Sol. El movimiento que realiza una piedra o cualquier otro cuerpo, alrededor de un punto fijo, si a través de una cuerda se ejerce una fuerza centrípeta que los mantiene a distancias más o menos constantes del punto alrededor del cual se realiza el movimiento.

2. Si la trayectoria de un cuerpo puntual, o la del centro de ma sa de un cuerpo rígido, es una circunferencia, se dice que su mo vimiento es circular. En este caso, la fuerza centrípeta, que es la encargada de modificar permanentemente la dirección del movi miento, está en cada momento dirigida hacia el centro de la cir cunferencia y su magnitud es constante. Es decir, es una fuerza cuya dirección está siempre cambiando y cuya magnitud se conserva. A estas conclusiones se puede llegar si describimos el movimiento circular, y después se establece la relación que existe entre las variables cinemáticas que caracterizan al cuerpo y la fuerza cen trípeta.

Cuando un cuerpo describe una trayectoria circular su vector de posición respecto al centro del círculo, cambia de orientación, pero conserva la magnitud. En esta forma, si caracterizamos al vector de posición con el par ordenado (r, θ), donde r especifi ca la magnitud del vector $\vec{r}$ y θ su dirección. Es claro, que la única variable cuyo valor cambiará con el transcurso del tiempo

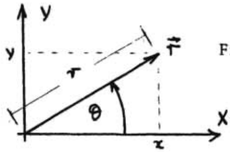


Figura 19

será θ . Se acostumbra medir el valor de θ con referencia al eje X y será positiva cuando se re corre en el sentido contrario al del movimiento de las manecillas de un reloj. Al moverse el cuer po el ángulo cambia desde el valor θ_0 en el instante t_0, hasta el valor $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$, en un instante posterior $t = t_0 + \Delta t$.
Se define la velocidad angular media de un cuerpo como el cocien te entre el desplazamiento angular $\theta - \theta_0$, y el tiempo transcurri do. Si la velocidad angular me dia se designa por $\bar{\omega}$ se tiene:

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{32}$$

Esta variable se mide en radia nes por segundo.

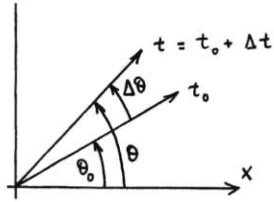


Figura 20

La velocidad angular media es una medida del desplazamiento angular total por cada segundo.
La velocidad angular instanténea ω, se define como la velocidad angular media evaluada en un intervalo de tiempo Δt tan pequeño que se puede decir que es la velocidad angular en un instante.
Así

$$\omega = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{33}$$

Si la velocidad angular es constante, entonces $\omega = \bar{\omega}$, y sólo en este caso

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{34}$$

Si la velocidad angular es constante, a tiempos iguales correspon derán desplazamientos angulares también iguales. Si se dibuja como función del tiempo, se obtiene la gráfica de la figura. Obsérvese que el desplazamiento angular $\Delta\theta = \omega\,\Delta t$, es numéricamente igual al área limitada por la curva que representa a los valores de ω en cada instante, el eje del tiempo y las rectas $t = t_0$ y $t = t_0 + \Delta t$.

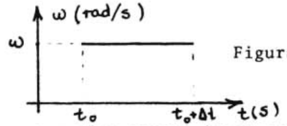


Figura 21

El tiempo que transcurre para que el cuerpo dé una vuelta completa (una revolución), se denomina el período T. De acuerdo con esto, el período T es igual al intervalo de tiempo Δt que necesita el cuerpo para que su desplazamiento $\Delta\theta$ sea igual a 2π. Haciendo uso de la ecuación (26), resulta que

$$T = \Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (35)$$

Cuanto mayor sea la velocidad angular, tanto menor será el período. En particular, si la velocidad angular es $\omega = 2\pi$ rad/s entonces, T = 1s. Esto es obvio puesto que el valor de ω nos dice que se desplaza 2π radianes (una revolución) en un segundo.

Se define la frecuencia ν como el número de revoluciones por cada segundo. Si deseamos conocer el valor de ν, se debe determinar el número de veces que está contenido el ángulo 2π en el desplazamiento total de cada segundo. Esto se consigue dividiendo el desplazamiento total de un segundo entre 2π, es decir dividiendo la frecuencia angular entre 2π. Consiguientemente.

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (36)$$

Según esta expresión la frecuencia es el inverso del período, es decir

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad (37)$$

Esto, es natural, puesto que el período es el tiempo que transcurre en cada revolución. Para determinar el número de revoluciones en cada segundo, todo lo que se debe hacer, es calcular cuantas veces el tiempo T está contenido en 1 segundo, lo que se consigue dividiendo 1 entre T segundos. La frecuencia se mide en s^{-1}, unidad que recibe el nombre de herz y se la designa por el símbolo Hz.

¿Qué relación existe entre las variables cinemáticas del movimiento circular y la fuerza centrípeta? Comencemos especificando la velocidad del cuerpo en cada punto de su trayectoria. Según se vió antes, el vector de velocidad es siempre tangente a la trayectoria. En la figura se dibujaron los vectores de velocidad en cuatro puntos de la trayectoria.

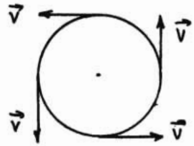
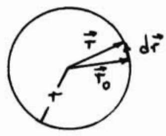


Figura 22

Puesto que $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, la magnitud de $\vec{v}$, estará definida por la relación

$$v = \frac{dr}{dt} \tag{38}$$

donde dr es la magnitud del desplazamiento que experimenta el cuerpo en el tiempo dt. Si el desplazamiento angular en este mismo tiempo es $d\theta$, es claro que



$$dr = r\, d\theta . \tag{39}$$

Figura 23

y la ecuación (38) toma la forma

$$v = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega \tag{40}$$

Ya hemos dicho que el vector velocidad cambia constantemente. Un análisis muy simple de los vectores velocidad correspondientes a dos instantes próximos nos informa de la naturaleza del vector $\Delta\vec{v}$.

Sean los instantes t_0 y $t = t_0 + \Delta t$. Los vectores de velocidad en estos instantes son como se muestra en la figura 24. Si es constante, entonces la magnitud de la velocidad también lo es (vease la ecuación 40).

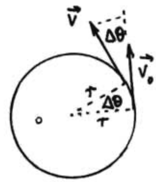


Figura 24

Para determinar el vector $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$, se realiza la diferencia gráfica de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{v}_0$. El vector $\Delta\vec{v}$, es como aparece en la figura 25. Se puede ver que si se reduce el tiempo Δt, lo que equivale a reducir el ángulo $\Delta\theta$, el vector $\Delta\vec{v}$ tiende a hacerse cada vez más perpendicular al vector de velocidad $\vec{v}_0$. O sea, $\Delta\vec{v}$ se dirige hacia el centro del círculo, y como $\Delta\vec{v}$ es proporcional a la fuerza que da lugar a esto, entonces, la fuerza que hace posible el movimiento circular debe estar dirigida hacia el centro del círculo.

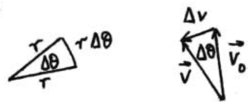


Figura 25

La fuerza, al ser perpendicular al vector velocidad, no modifica la magnitud del vector velociad pero sí su dirección.

Una vez establecida la dirección del vector $\Delta\vec{v}$, queda por determinar su magnitud. Se puede determinar ésta de la siguiente for -

ma: El sector circular que se observa en la fig. (24) es, para $\Delta\theta$ muy pequeño, aproximadamente en triángulo semejante al que se forma en la figura 25. Por lo tanto

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{r\,\Delta\theta}{r} \qquad (41)$$

de donde resulta que

$$\Delta v = v\,\Delta\theta$$

y como $\Delta v = \frac{\Delta t}{m} F_c$, es claro que la magnitud de la fuerza centrípeta se puede expresar en la forma

$$F_c = mv\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = mv\,\bar{\omega} \qquad (42)$$

Si la fuerza centrípeta es constante ($\omega = \bar{\omega}$), y se tiene en cuenta que $v = \omega r$, resulta que

$$F_c = mr\,\omega^2 = m\,\frac{v^2}{r} \qquad (43)$$

Finalmente, si tenemos presente que de acuerdo con la segunda ley de Newton, $F_c = ma_c$, la aceleración centrípeta estará dada por

$$a_c = r\,\omega^2 = \frac{v^2}{r} \qquad (44)$$

1.4 Problemas

01. Se define un sistema inercial como aquel sistema en el que es válida la primera ley de Newton. Supóngase que un sistema fijo con respecto a las estrellas lejanas es un sistema inercial. Indicar cuáles de los siguientes sistemas son inerciales: a) sistema fijo respecto a la superficie de la Tierra; b) sistema fijo en el Sol; c) sistema fijo en la Luna; d) un sistema moviéndose con velocidad constante respecto a las estrellas lejanas.

02. (Figura 01) Conociendo la gráfica posición-tiempo, identificar las regiones en las que la velocidad instantánea es: a) cero; b) positiva; c) negativa.

03. (Figura 02) Obtener la gráfica posición tiempo si para $t = 0s$, $x = +5m$.

04. (Figura 03) Obtener la gráfica velocidad-tiempo.

05. En una competencia se mide la velocidad de un automóvil cada 2 segundos, obteniéndose los siguientes datos:

t/s	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
v/(m/s)	0	3	15	30	45	50	50	40	35	25	20

Obtener: a) la gráfica velocidad-tiempo; b) la aceleración en $t = 16s$; c) un valor aproximado del desplazamiento 20 segundos después de haber arrancado; d) la velocidad media del automóvil durante los primeros 20 segundos.

07. (Figura 04) Se dice que corresponde a la gráfica de un viaje en automóvil. ¿Representa una situación real? ¿Por qué?

08.(Figura 05) Calcular: a) la aceleración instantánea para $t = 3s$; b) la aceleración instantánea para $t = 7s$; c) la aceleración instantánea para $t = 11s$; c) la distancia recorrida en los primeros 5 segundos; e) la distancia recorrida en los primeros 9 segundos.

09.(Figura 06) La gráfica muestra la velocidad a lo largo de una línea recta de un objeto de masa 2 kg en función del tiempo. Obtener: a) la gráfica de la fuerza en función del tiempo; b) la fuerza máxima; c) la fuerza promedio en el intervalo de tiempo de 0 a 10 segundos y de 0 a 20 segundos.

10.(Figura 07) Obtener la distancia recorrida.

11. Una persona de peso W está en un elevador. Determine la fuerza P que ejerce el pasajero sobre el piso del elevador, cuando: a) el elevador está en reposo; b) el elevador sube con la aceleración a; c) el elevador baja con la aceleración $a < g$; d) el elevador baja con la aceleración $a = g$, donde g es la aceleración de la gravedad.

12.(Figura 08) Un bloque de masa $m_1 = 43.8$ kg que descansa en un plano inclinado liso a 30°con respecto a la horizontal, está unido, mediante una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento, con otro bloque de masa $m_2 = 29.2$ kg suspendido verticalmente. Calcular: a) la aceleración de cada cuerpo; b) la tensión en la cuerda.

13.(Figura 09) Dos bloques están en contacto en una mesa sin rozamiento. Se aplica una fuerza horizontal a uno de los bloques. Si $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 1$ kg y $F = 3$ N, a) encontrar la fuerza de contacto entre los bloques; b) demostrar que si se aplica la misma fuerza a m_2 en lugar de hacerlo a m_1, la fuerza de contacto entre los bloques es de 2N, que no es igual al valor obtenido en a) Explicar porqué.

Explicar porqué.

14. Un trozo de hielo resbala por un plano inclinado a 45°en un tiempo doble del que tardaba para resbalar sin rozamiento. Determinar el coeficiente de rozamiento cinético entre el hielo y el plano inclinado.

15. (Figura 10) Considerando el siguiente diagrama fuerza-tiempo, ¿qué interpretación podría dar a la variación de la velocidad?

16. De las siguientes afirmaciones, indicar cuáles son verdaderas: a) un objeto puede tener una velocidad constante a pesar de que su rapidez este cambiando; b) un objeto puede tener una rapidez constante a pesar de que su velocidad esté cambiando; c) un objeto puede tener una velocidad cero a pesar de que su aceleración no es cero; d) un objeto sujeto a una aceleración constante puede invertir su velocidad.

17. Un cuerpo cae verticalmente desde una altura h = 19.6 m con una velocidad inicial igual a cero. Determinar su desplazamiento: a) durante el primer 0.1 segundo de estar en movimiento; b) durante el último 0.1 segundo de su caída. Despreciar la resistencia del aire.

18. Si un cuerpo recorre la mitad de su distancia total de caída libre durante el último segundo de su movimiento a partir del reposo, calcula el tiempo y la altura desde la cual cae. Explicar la solución físicamente inaceptable de la ecuación cuadrática del tiempo.

19. Se dispara un cohete verticalmente y sube con una aceleración vertical constante de 19.6 m/s durante 1 minuto. En este momento agota su combustible y sigue subiendo hasta cierta altura. Calcular: a) la máxima altura que alcanza; b) el tiempo total transcu-

rrido desde el momento en que despega el cohete hasta que regresa al suelo.

20. Un automóvil se desplaza con una velocidad constante de 100 km/h. Un agente de tránsito en reposo lo ve y empieza a acelerar su motocicleta cuando el auto pasa de frente a él. La motocicleta puede acelerar a $6 m/s^2$ y alcanza una velocidad máxima de 150 km/h. ¿Alcanzará al aumovilista? En caso afirmativo ¿Cuánto tiempo tarda y que distancia recorrerá antes de alcanzarlo?

21.(Figura 11) No hay fricción entre los bloques y la mesa. Calcular la tensión en la cuerda y la aceleración de m_2 si m_1=300 g, m_2 = 200 g y F = 0.40 N.

22. Un bloque rectangular de masa m está sobre otro bloque similar que, a su vez, está sobre una mesa lisa. La máxima fuerza de fricción posible de un bloque sobre el otro es de 2.0 mN ¿Cuál es la mayor aceleración posible que se puede dar al bloque inferior, sin que el superior se resbale y caiga? ¿Cuál es el coeficiente de fricción entre los dos bloques?

23. Considérese un proyectil en el punto más alto de su trayectoria. a) ¿Cual es su rapidez en función v_0 y de θ? b) ¿Cuál es su aceleración ? c) ¿Cómo es la dirección de su aceleración en relación con la de su velocidad?

24. Un rifle que tiene una velocidad de salida de 457 m/s dispara una bala a un blanco pequeño colocado a 45.7 m de distancia. Determinar la elevación del rifle respecto a la horizontal, para que la bala dé en el blanco.

25. Una partícula está en reposo en la parte superior de un hemisferio de radio R. Encontrar la mínima velocidad horizontal que deberá imprimírsele a la partícula para que salga del hemisferio sin resbalar sobre él.

26. En un tubo de rayos catódicos se dispara horizontalmente un haz de electrones con una velocidad de 10^7 m/s en la región situada entre un par de placas horizontales de 0.02 m de largo. Un campo eléctrico entre las placas ejercen sobre los electrones una aceleración constante hacia abajo de magnitud 10^{15} m/s^2. Encontrar: a) el desplazamiento vertical del haz al pasar a través de las placas; b) la velocidad el haz (dirección y magnitud) cuando sale de las placas.

27.(Figura 12) Un muchacho de pie sobre la plataforma de una vagoneta que lleva una velocidad constante de 9 m/s desea lanzar una pelota de forma que pase por un aro colocado a 4.80 m de altura sobre su mano y que lo atraviese horizontalmente. Arroja la pelota con una velocidad de 12 m/s respecto a sí mismo. a) ¿Cuál debe ser la componente vertical de la velocidad inicial de la pelota? b) ¿Cuántos segundos transcurren desde que caiga la pelota hasta que ésta atraviesa el aro? c) ¿A qué distancia horizontal de la vertical del aro debe lanzar la pelota?

28. ¿Cuál es la velocidad angular de un automóvil que en una carretera da una vuelta de 110 m de radio con una velocidad de 48.3 km/h?

29. En un parque de diversiones hay un rotor (cilindro hueco que gira alrededor de un eje central), en el cual una persona se para contra la pared. El rotor aumenta gradualmente su velocidad de rotación a partir del punto de reposo, hasta que a una velocidad predeterminada, el piso bajo la persona se abre y el pasajero no cae sino permanece pegado a la pared del rotor. Encontrar el coeficiente de rozamiento necesario para impedir la caída.

30. (Figura 13) Una masa m colocada sobre una mesa sin rozamiento está unida a una masa M suspendida mediante una cuerda que pasa por una agujero en la mesa. Si M está en reposo, encontrar la relación entre v y r, cuando gira la masa.

31. Una curva circular de carretera esta proyectada para vehículos con velocidad de 64.4 km/h. a) si el radio de la curva es de 122 m ¿cuál es el ángulo adecuado de peraltado de la carretera? b) si la curva no esta peraltada, ¿cuál es el mínimo coeficiente entre las llantas y la carretera para evitar que los vehículos se deslicen a esa velocidad?

32. Encontrar la velocidad angular de la Tierra con respecto a su eje (no considere el movimiento de la Tierra alrededor del Sol).

33. Una piedra atada a una cuerda gira uniformemente en un plano vertical. Hallar la masa de la piedra sabiendo que la diferencia entre la tensión máxima y la mínima de la cuerda es igual a 9.8 N.

34. Hallar el valor númerico de la primera velocidad cósmica, es decir, la velocidad que hay que comunicarle a un cuerpo en la superficie de la Tierra, en dirección horizontal, para que comience a moverse alrededor de ésta siguiendo una órbita circular.

35. ¿Con qué rapidez debe volar un avión que describe un círculo perpendicular al suelo 1 km de radio, si el piloto no experimenta ninguna fuerza en el asiento ni en el cinturón de seguridad cuando se halla en el punto más alto del recorrido? En estas circunstancias se suele decir que el piloto no tiene peso.

36. ¿Con qué velocidad angular debe girar la Tierra para que el peso aparente de un cuerpo en el Ecuador sea cero?: b) ¿Cuál sería en este caso la duración de un día?

37. Una pesa atada a un hilo de 30 cm de largo, describe en el plano horizontal circunferencias de 15 cm de radio. ¿Qué número de revoluciones por minuto será el correspondiente a esta velocidad de rotación de la pesa?

38.(Figura 14) La longitud de las varillas de un regulador centrí fugo es igual a 12.5 cm. ¿Qué número de revoluciones por segundo dará el regulador si, al girar, los contrapesos se desvían de la vertical un ángulo a) de 60° y b) de 30°.

39. Los glóbulos rojos y otras partículas suspendidas en la san - gre son tan ligeras que difícilmente se asientan cuando la sangre se deja en reposo. ¿Qué tan rápido (en rev/s) debe rotarse una muestra de sangre en una centrífuga con un radio de 10 cm si la fuerza centrípeta necesaria para retener una de las partículas en una trayectoria circular es 10,000 veces el peso mg de la partí - cula? ¿Por qué las partículas se separan de la solución en una centrífuga?

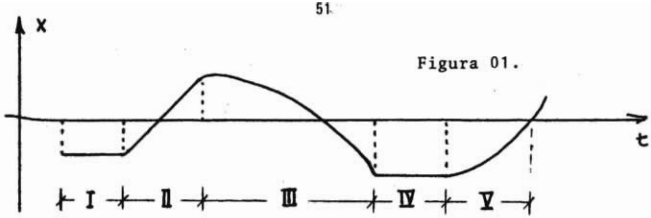


Figura 01.

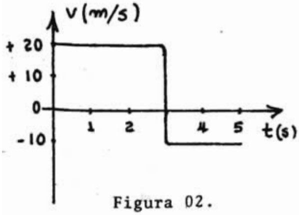


Figura 02.

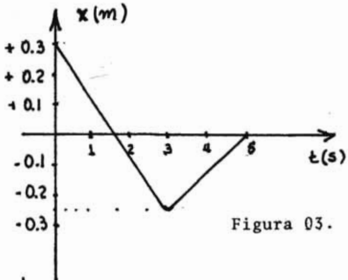


Figura 03.

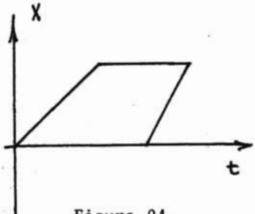


Figura 04.

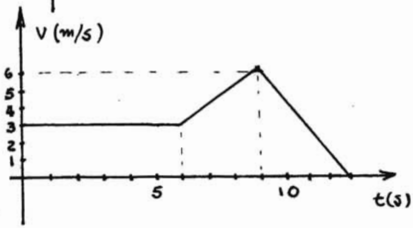


Figura 05.

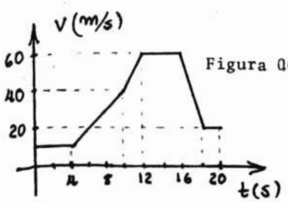


Figura 06.

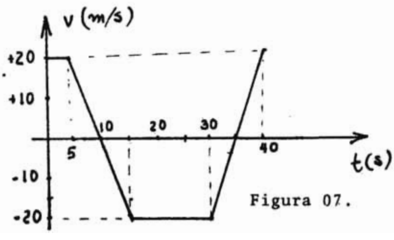


Figura 07.

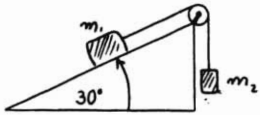


Figura 08

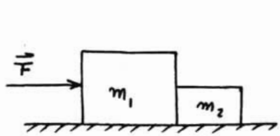


Figura 09.

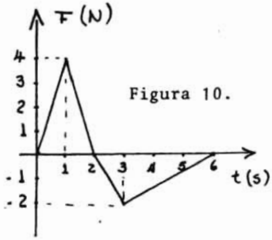


Figura 10.

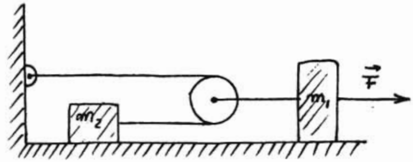


Figura 11.

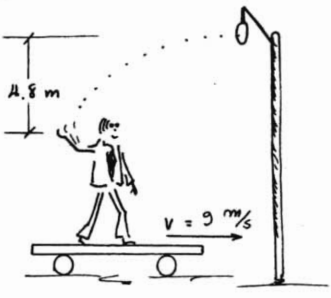


Figura 12.

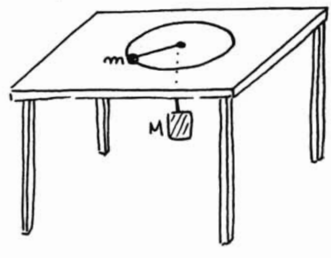


Figura 13.

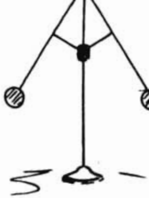


Figura 14.

UNIDAD 2: TRABAJO Y ENERGÍA MECÁNICOS

2.1 Trabajo y energía cinética;

2.2 Energía potencial;

2.3 Problemas.

Preparó: Abelardo Rodríguez (Teoría) y Nicolás Falcón (Problemas).

Referencias:

U Haber - Schaim, JB Cross, JH Dodge y JA Walter, PSSC Física tercera edición. Editorial Reverté, Barcelona, 1975. Capítulos 15 y 16.

D Halliday y R Resnick, Fundamentos de Física, CECSA, México, 1978. Capítulos 6 y 7.

S Gartenhaus, Física, Interamericana, México, 1979.Capítulos 7 y 8.

2.1. Trabajo y energía cinética.

1. Definir trabajo y energía cinética en forma diferencial y encontrar su relación;
2. Definir el trabajo para trayectorias planas;
3. Derivar la relación general entre el trabajo y la energía cinética;
4. Calcular el trabajo con fuerzas simples en una y dos dimensiones;
5. Ejemplificar lo que es una fuerza no-conservativa,

1. La segunda ley de Newton expresa que la fuerza total $\vec{F}$, que actúa sobre una partícula de masa m durante un pequeño espacio de tiempo dt, produce un pequeño cambio $d\vec{v}$ de la velocidad de la partícula dado por la ecuación

$$m\, d\vec{v} = \vec{F}\, dt. \tag{1}$$

El cambio de la velocidad comprende en general cambios tanto en su magnitud como en su dirección. Ahora bien, en muchas situaciones la partícula se halla restringida a moverse a lo largo de una trayectoria conocida como, por ejemplo, cuando la partícula se desliza por una guía de forma y dimensiones conocidas, o cuando efectúa un movimiento pendular en el extremo de una cuerda, describiendo una circunferencia (Figura 1).

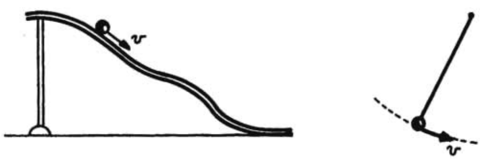


Figura 1.

En estos casos se conoce de antemano cómo variará la dirección de la velocidad entre dos posiciones cualesquiera de la partícula, por la propiedad de la velocidad de ser tangente a la trayectoria. Un aspecto del movimiento que resulta entonces de interés, es la variación de la magnitud de la velocidad con el desplazamiento a lo largo de la trayectoria dada.

El estudio de este aspecto del movimiento, que constituye el problema central de esta unidad, conduce a los conceptos importantes de energía cinética y trabajo. El primero está asociado con la masa y la magnitud de la velocidad (o rapidez), y el segundo con la fuerza y el desplazamiento de la partícula.

El sistema físico en consideración constará siempre de una sola partícula, que interactúa con un sistema externo. Este sistema externo está compuesto por los cuerpos en la vecindad de la partícula que son capaces de influenciar apreciablemente el movimiento de la misma. Las fuerzas de interacción podrán ser de cualquier tipo: fuerzas de contacto o de acción a distancia, fuerzas dependientes de la posición o de la velocidad, etc.

Nuestro punto de partida es la ecuación fundamental (1), que transformaremos adecuadamente con el fin de derivar una relación general entre posición y rapidez, que podamos aplicar en situaciones en las que se conozca la trayectoria de la partícula. Recordemos primeramente el siguiente resultado de la teoría del movimiento: El efecto de la fuerza total $\vec{F}$ sobre la velocidad $\vec{v}$ de la partícula, puede separarse en un efecto sobre la dirección, y otro efecto sobre la magnitud de $\vec{v}$. Descomponiendo $\vec{F}$ en sus componentes vectoriales $\vec{F}_{\parallel}$ y $\vec{F}_{\perp}$, paralela y perpendicular a $\vec{v}$, respecti vamente (Figura 2), se tiene que

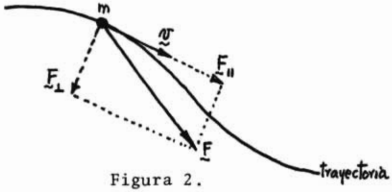


Figura 2.

(a) el cambio de dirección de $\vec{v}$ es debido a $\vec{F}_{\perp}$, y

(b) el cambio de magnitud de $\vec{v}$ es debido a $\vec{F}_{\parallel}$.

De acuerdo con (b), si deseamos investigar la variación de la rapidez de la partícula, debemos tomar en cuenta únicamente la componente de la fuerza en la dirección de la velocidad (o, lo que es lo mismo, la componente tangencial a la trayectoria, o paralela al pequeño desplazamiento $d\vec{r}$ de la partícula durante el lapso dt).

El razonamiento anterior nos lleva a considerar el producto escalar $\vec{F}\cdot\vec{v}$, que es proporcional a la proyección de $\vec{F}$ sobre $\vec{v}$. Este producto puede sacarse de la ecuación (1), multiplicando ambos miembros escalarmente por el vector $\vec{v}$:

$$\vec{v}\cdot(m\ d\vec{v}) = \vec{v}\cdot(\vec{F}\ dt)$$

o bien,

$$m\vec{v}\cdot d\vec{v} = \vec{F}\cdot\vec{v}\ dt \tag{2}$$

Escribiendo

$$\vec{v} = v_x i + v_y j$$

$$d\vec{v} = dv_x i + dv_y j$$

se reconoce que

$$\vec{v}\cdot d\vec{v} = v_x dv_x + v_y dv_y = \frac{1}{2}\, d(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}\, d(v^2),$$

en donde $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ es el cuadrado de la rapidez, y $d(v^2)$ es el cambio o diferencial de v^2 durante el lapso dt.

La ecuación (2) queda en la forma siguiente:

$$m\frac{1}{2}d(v^2) = \vec{F}\cdot\vec{v}dt$$

o bien,

$$d(\frac{1}{2}mv^2) = \vec{F}\cdot\vec{v}dt \qquad (3)$$

Finalmente, eliminemos el tiempo dt, haciendo uso de la definición de velocidad:

$$d\vec{r} = \vec{v}\, dt \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3) llegamos a la relación buscada,

$$d(\frac{1}{2}mv^2) = \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (5)$$

Conviene introducir en este punto cierta notación y terminología para escribir la ecuación (5) en forma más compacta.

Definición: La energía cinética E_k de una partícula es

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, \qquad (6)$$

en donde m es la masa de la partícula y v es su rapidez.

Definición: El trabajo hecho por la fuerza $\vec{F}$ sobre la partícula mientras ésta realiza un pequeño desplazamiento $d\vec{r}$, es:

$$\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (7)$$

En términos de las cantidades que acabamos de definir, la ecuación (5) adopta la forma:

$$dE_k = \delta W \text{ (hecho por la fuerza \underline{total})} \qquad (8)$$

En palabras: el cambio de la energía cinética de la partícula, correspondiente a un pequeño desplazamiento, es igual al trabajo hecho por la fuerza total sobre la partícula en ese desplazamien to.

El análisis efectuado para obtener la ecuación (8), se refiere a lo que acontece en un pequeño intervalo de tiempo de duración dt. Hay que tener presente que dt debe ser lo suficientemente pequeño para que todas las ecuaciones consideradas hasta ahora se cumplan con el grado de aproximación requerido. En especial, la expresión $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ para el trabajo presupone que el pequeño desplazamiento $d\vec{r}$ reproduce una pequeña porción de la trayectoria, que puede considerarse recta con muy buena aproximación (Figura 3), y, además, que la fuerza $\vec{F}$ puede considerarse constante a través de este pequeño desplazamiento.

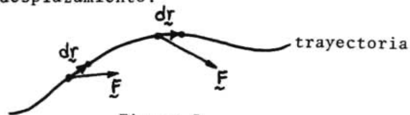


Figura 3.

El siguiente paso es extender el análisis a intervalos de tiempo arbitrarios o, correspondientemente, a desplazamientos arbitrarios, con objeto de facilitar su aplicación a problemas de movimiento. Antes de proceder a esta extensión, discutiremos algunas propiedades de E_k y δW.

(A) La unidad de energía cinética se sigue de su definición

$$\text{Unidad de } E_k = (\text{kg})\left(\frac{\text{metro}}{\text{s}}\right)^2 = \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\text{m} = (\text{Newton})(\text{metro})$$

A esta combinación de unidades se le da el nombre de Joule:

$$\text{Joule} = \text{J} = \text{kg}\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{Newton.metro} = \text{N.m}$$

En virtud de la igualdad $dE_k = \delta W$, la unidad de trabajo es la misma que la de energía cinética.

(B) E_k es por definición una cantidad no-negativa ($E_k \geq 0$), puesto que m y v^2 son no-negativas.

(C) Sean

F = magnitud de $\vec{F}$

dl = magnitud de $d\vec{r}$

θ = ángulo entre $\vec{F}$ y $d\vec{r}$

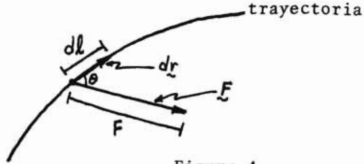


Figura 4.

Por la definición de producto escalar,

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \, dl \cos\theta \qquad (9)$$

Como θ está comprendido entre 0°y 180°, $\cos\theta$ varía entre -1 y +1, de modo que el trabajo δW puede ser positivo, cero o negativo (Figura 5).

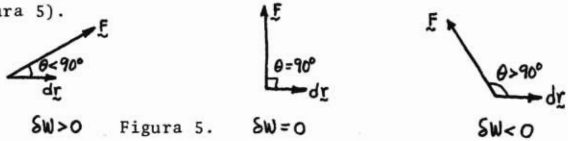


Figura 5.

(D) Si actúan varias fuerzas simultáneamente sobre la partícula, digamos las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$,..., las expresiones

$$\delta W_1 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} \ ; \ \delta W_2 = \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} \ ; \ \delta W_3 = \vec{F}_3 \cdot d\vec{r}, \ldots$$

corresponden a los trabajos realizados por cada una de las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$,..., respectivamente, en el mismo desplazamiento $d\vec{r}$. La resultante $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots$ realiza el trabajo

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots) \cdot d\vec{r} \\ &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_3 \cdot d\vec{r} + \ldots \\ &= \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3 + \ldots \end{aligned}$$

Es decir, el trabajo hecho por varias fuerzas actuando conjuntamente, es igual a la suma de los trabajos hechos por las fuerzas individuales separadamente. Esta importante propiedad se denomina principio de superposición para el trabajo.

(D) La energía cinética es una función de una variable: la rapidez. A cada punto de la trayectoria, o a cada instante del movimiento, le corresponde uno y sólo un valor de la rapidez y, por consiguiente, de la energía cinética. La cantidad dE_k es la diferencia de las energías cinéticas de dos puntos de la trayectoria, conectados espacialmente por el vector $d\vec{r}$, o separados temporalmente por el lapso dt. La cantidad δW no puede interpretarse en general, como una diferencia de valores de una cierta función W. Por esta razón el trabajo no se ha escrito dW.

Ejemplo. Una esferita de masa m = 0.05 kg oscila en una circunferencia, sujeta al extremo de una cuerda de longitud l = 2 m. Para los pequeños desplazamientos indicados en la Figura 6, todos ellos de magnitud dl = 0.001 m, calcular el trabajo hecho por (a) el peso de la esferita, (b) la tensión de la cuerda, (c) la fuerza de fricción con el aire, supuesta de valor constante R = 0.12 N, y (d) la fuerza total.

Calcularemos los trabajos por medio de la ecuación (9). La figura 7 muestra las direcciones relativas de las fuerzas y del desplazamiento para cada una de las situaciones indicadas en la Figura 6.

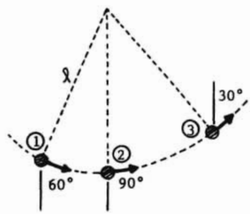


Figura 6 .

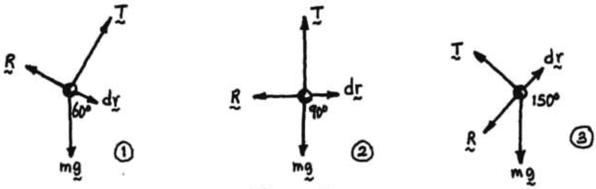


Figura 7.

La fricción y el peso son fuerzas de magnitud constante:

$$R = 0.12 \text{ N}$$

$$mg = (0.05 \text{ kg})\ (9.8 \text{ m/s}^2) = 0.48 \text{ N}.$$

La tensión T es una fuerza variable, pero no es necesario conocer su magnitud, ya que siempre es perpendicular a $d\vec{r}$ y, por lo tanto, no realiza trabajo:

$$(\delta W)_T = T\ dl\ \cos 90° = T \cdot dl \cdot 0 = 0$$

Por la misma razón, el trabajo del peso es nulo en la situación (2). El trabajo de la fricción es el mismo en las tres situaciones:

$$(\delta W)_R = R\ dl\ \cos 180° = (0.12 \text{ N})(0.001 \text{ m})9\text{-}1) = -0.00012 \text{ J}$$

El trabajo del peso en (1) es:

$$(\delta W)_{mg} = mg\ dl\ \cos 60° = (0.48 \text{ N})(0.001\text{m})(0.5) = 0.00024 \text{ J}$$

y en (3) es:

$$(\delta W)_{mg} = mg\ dl\ \cos 150° = (0.48 \text{ N})(0.001 \text{ m})(-0.866) = -0.00041 \text{ J}$$

El trabajo total es:

En (1) $\quad -0.00012 \text{ J} + 0 + 0.00024 \text{ J} = +\ 0.00012 \text{ J}$

En (2) $\quad -0.00012 \text{ J} + 0 + 0 \qquad = -\ 0.00012 \text{ J}$

En (3) $\qquad -0.00012\ J + 0 - 0.00041\ J = -0.00053\ J$

2. Procediendo ahora a la extensión de la relación (8) a intervalos de tiempo arbitrarios, empecemos por extender la definición de trabajo, restringiéndonos por el momento al caso más simple en que la partícula se desplaza en línea recta (desplazamiento "directo"), y la fuerza considerada es constante en magnitud y dirección.

Denotando por $\vec{d}$ al vector desplazamiento entre dos posiciones terminales A y B cualesquiera de la partícula, y por $\vec{F}$ a la fuerza constante, el trabajo realizado por $\vec{F}$ entre A y B es:

$$(10) \qquad W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd\cos\theta$$

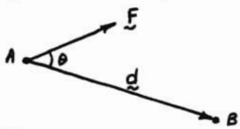


Figura 8.

en donde $\theta = \sphericalangle(\vec{F},\vec{d})$, como se muestra en la Figura 8.

Reconociendo que $F\cos\theta$ es la componente numérica de $\vec{F}$ en la dirección de $\vec{d}$, tenemos según (10) que:

El trabajo hecho por una fuerza constante en un desplazamiento directo, es igual al producto de la distancia recorrida y de la componente de la fuerza en la dirección del movimiento.

Ejemplo. Calcular el trabajo hecho por el peso de una partícula de masa m, en un desplazamiento vertical de magnitud h en los casos de movimiento ascendente y descendente.

Figura 9a.

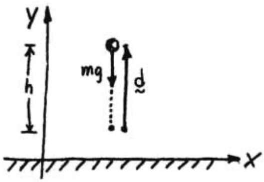
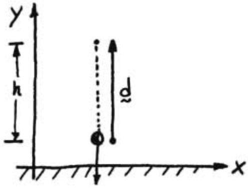


Figura 9b.



Aplicando la fórmula (10) tenemos:

Para el movimiento ascendente, Figura 9a,

$$\vec{F} = -mg\hat{j} \quad ; \quad \vec{d} = h\hat{j}$$

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = (-mg\hat{j})\cdot(h\hat{j}) = -mgh$$

Para el movimiento descendente, Figura 9b,

$$\vec{F} = -mg\hat{j} \quad ; \quad \vec{d} = -h\hat{j}$$

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = (-mg\hat{j})\cdot(-h\hat{j}) = +mgh$$

<u>Ejemplo</u>. Una carga eléctrica positiva q es proyectada desde la placa positiva de un capacitor de placas paralelas, hacia la placa negativa, a una distancia d. La carga se mueve siempre en la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ del capacitor. Calcular el trabajo realizado por la fuerza eléctrica en el desplazamiento entre las placas (Figura 10).

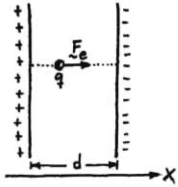


Figura 10

La fuerza eléctrica sobre la carga es:

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = qE\hat{i}$$

y el desplazamiento es

$$\vec{d} = d\hat{i}$$

Por lo tanto, el trabajo es igual a

$$W = \vec{F}_e\cdot\vec{d} = (qE\hat{i})\cdot(d\hat{i}) = qEd$$

Ejemplo. Refiriéndose a la situación ilustrada en la Figura 11, supongamos que el bloque A se desplaza hacia arriba del plano inclinado, recorriendo una distancia d. Calcular el trabajo hecho por las fuerzas constantes del peso, la reacción normal y la tensión de la cuerda. Primeramente es necesario aplicar las leyes de Newton para calcular las fuerzas, resultando:

$$N = m_A g \cos\alpha$$

$$T = \frac{m_A m_B (1+\mathrm{sen}\,\alpha) g}{m_A + m_B}$$

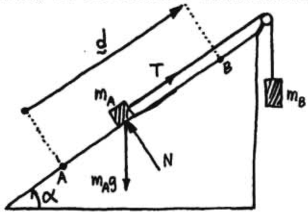


Figura 11

Calcularemos los trabajos prescindiendo de la notación vectorial, multiplicando la distancia recorrida d por la componente (con su signo apropiado) de cada fuerza a lo largo del plano inclinado:

$$W\ (\text{peso}) = d(-m_A g \cos\ (90° - \alpha)) = -m_A g d\ \mathrm{sen}\,\alpha$$

$$= -m_A g h \qquad (h = \text{desplazamiento vertical del bloque A})$$

$$W\ (\text{fuerza normal}) = 0 \qquad \text{ya que } \vec{N} \text{ es perpendicular a } \vec{d}$$

$$W\ (\text{tensión}) = +\ dT = \frac{m_A m_B (1+\mathrm{sen}\,\alpha) g d}{m_A + m_B}$$

2. En el caso general, la partícula describe una trayectoria curva, y la fuerza considerada es función del estado de la partícula (entendiendo por el <u>estado</u> de la partícula el conjunto de variables que definen su posición y su velocidad). Formulemos la definición de trabajo para el caso general, la que incluye como caso particular la definición dada para desplazamientos directos.

Supongamos que la partícula describe cierta trayectoria Γ conocida, y que actúan sobre ella una o varias fuerzas de cualquier tipo. Sea $\vec{F}$ una de las fuerzas aplicadas sobre la partícula, y A y B dos puntos cualesquiera de la trayectoria Γ (Figura 12)

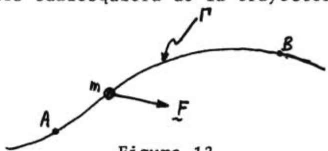


Figura 12

Imaginemos el movimiento a lo largo de Γ como una sucesión temporal de pequeños desplazamientos, formando una cadena que empieza en A y termina en B (Figura 13).

Figura 13

Se define el trabajo hecho por la fuerza $\vec{F}$ sobre la partícula, a lo largo de la trayectoria Γ entre los puntos A y B, como la suma de los trabajos hechos por $\vec{F}$ en el conjunto de pequeños desplazamientos que componen a la porción de Γ comprendida entre A y B.

Esta definición proporciona una manera de calcular el trabajo, que consiste de los siguientes pasos: se evalúa la fuerza en un conjunto numeroso de puntos de la trayectoria; se calcula el trabajo realizado por la fuerza entre cada par de puntos consecutivos, con ayuda de la expresión $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ (siendo $\vec{F}$ el valor de la fuerza en el primer punto, y $d\vec{r}$ el vector desplazamiento entre el par de puntos), y se forma la suma de todos estos trabajos. Conforme se incrementa el número de puntos, el valor de la suma tien de a cierto valor límite definido, que se identifica como el valor del trabajo para la fuerza y la porción de la trayectoria dados.

Este proceso se presta para el uso de una computadora, cuando la fuerza es muy complicada y la forma de la trayectoria es compleja. Para el tipo de fuerzas que consideraremos en este capítulo, el trabajo se calculará por medio de la integral

$$W = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{11}$$

Aquí $d\vec{r}$ representa cualquier desplazamiento de la sucesión, y $\vec{F}$ es la fuerza evaluada en el punto inicial de $d\vec{r}$ (Figura 14).

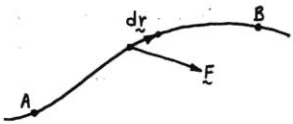


Figura 14

La integral (11) se denomina integral de línea, a causa de su asociación con una trayectoria.

El trabajo posee tres características que lo determinan en su conjunto: la fuerza $\vec{F}$ considerada, la trayectoria Γ especificada, y los puntos terminales A y B. A veces usaremos la notación W_Γ $(A \longrightarrow B)$ para indicar el trabajo de una fuerza sobreentendida.

El trabajo posee además las siguientes propiedades:

(i) Propiedad de aditividad del trabajo.

Sean A, B y C tres puntos de Γ (Figura 15). Se cumple la propiedad

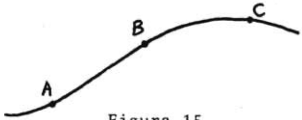


Figura 15

$$W_\Gamma(A \to C) = W_\Gamma(A \to B) + W_\Gamma(B \to C)$$

sin importar la relación de orden que guarden A, B y C.

ii) Si se invierte el sentido del movimiento, el trabajo cambia de signo:

$$W_\Gamma(B \longrightarrow A) = -W_\Gamma(A \longrightarrow B)$$

iii) Principio de superposición para el trabajo.

El trabajo hecho por la resultante de un sistema de fuerzas actuando sobre una partícula, es igual a la suma de los trabajos hechos individualmente por cada una de las fuerzas del sistema.

4. Sea $\vec{F}$ la fuerza <u>total</u> (o resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula). Entonces la igualdad $dE_k = \delta W$ es válida en todos y cada uno de los pequeños desplazamientos en que se descompone la trayectoria, y también es válido escribir:

$$\int_A^B \delta W = \int_A^B dE_k$$

Pero

$$\int_A^B \delta W = W$$

y

$$\int_A^B dE_k = \Big[E_k \Big]_A^B = E_k(B) - E_k(A) = \frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2 \equiv \Delta E_k$$

de tal manera que $W = \Delta E_k$. Este es el resultado principal de esta unidad. El trabajo hecho por la fuerza total sobre una partícula, entre dos puntos cualesquiera de la trayectoria, es igual a la variación de la energía cinética entre estos dos puntos:

$$W = \Delta E_k \tag{13}$$

5. (I) Trabajo en una dimensión.

Consideremos una partícula de masa m que se mueve en línea recta, y sea $\vec{F}$ una fuerza aplicada sobre la partícula, cuya dirección está siempre a lo largo de la recta del movimiento (Figura 16). Tomemos un eje x de coordenadas apropiado, y supongamos que la fuerza $\vec{F}$ depende únicamente de la posición o coordenada x de la partícula:

$$\vec{F} = F(x)\hat{i}$$

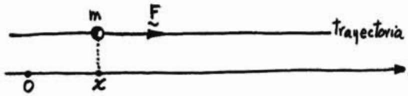


Figura 16

En cualquier porción de la trayectoria,el desplazamiento $d\vec{r}$ se puede expresar en la forma (Figura 17)

$$d\vec{r} = (dx)\hat{i}$$

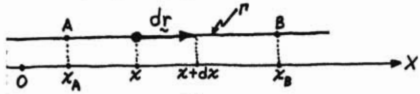


Figura 17

El trabajo hecho por la fuerza $\vec{F}$ a lo largo del segmento recto $\overline{AB}$ (denotado por Γ), adopta la siguiente forma

$$W_\Gamma(A \to B) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F(x)\hat{i} \cdot dx\hat{i}$$

o sea,

$$W_\Gamma(A \to B) = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\, dx$$

Aunque hemos supuesto que la partícula se desplaza directamente entre A y B, la fórmula (14) es válida para cualquier modo de desplazamiento neto entre A y B. Las Figuras 18 y 19 muestran otros dos modos posibles de desplazamiento entre A y B, designados por los símbolos de las trayectorias Γ' y Γ'':

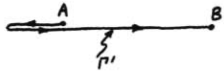


Figura 18

Figura 19

(Los diferentes tramos de la trayectoria se han desplazado un poco por claridad).

En símbolos

$$W_{\Gamma}(A\rightarrow B) = W_{\Gamma'}(A\rightarrow B) = W_{\Gamma''}(A\rightarrow B) = \dots . = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\, dx$$

Debido a esta propiedad, no es necesario especificar la trayectoria para caracterizar al trabajo en este caso. Este queda determinado solamente por las coordenadas de los puntos terminales A y B. Tiene sentido entonces suprimir el índice Γ que denota la trayectoria en la fórmula (14):

$$W(A\rightarrow B) = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\, dx \tag{15}$$

Más adelante encontraremos otros tipos de fuerzas, para las cuales el trabajo realizado entre dos puntos fijos no depende de la forma de la trayectoria que conecta estos dos puntos, pudiendo la trayectoria tener forma curva arbitraria. Tales fuerzas juegan un papel importante en la física, y reciben el nombre de fuerzas conservativas, conforme la siguiente definición:

Definición: Una fuerza se denomina <u>conservativa</u> cuando el trabajo realizado por ella entre dos puntos cualesquiera, no depende de la forma de la trayectoria que conecta estos dos puntos. En caso contrario, la fuerza se denomina <u>no-conservativa</u>.

Aparte de la obtención de la fórmula (15), una conclusión de la discusión anterior es que toda fuerza que dependa únicamente de la posición de la partícula en un movimiento rectilíneo es una fuerza conservativa.

<u>Ejemplo</u> 1. Calcular el trabajo realizado por la fuerza elástica de un resorte lineal de constante k, al desplazar una partícula de masa m sujeta a su extremo libre, entre los puntos x_A y x_B. La situación se muestra en la Figura 20.

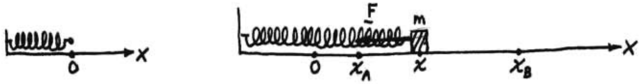


Figura 20

Se ha escogido al eje x de tal manera que su origen corresponda a la posición relajada del resorte. De esta manera la coordenada x coincide con la deformación del resorte, y la fuerza es

$$\vec{F} = -kx\hat{i}$$

de donde obtenemos

$$F(x) = -kx$$

Aplicando la fórmula (15) obtenemos

$$W = \int_{x_A}^{x_B} (-kx)\ dx = \left[-k\ \frac{x^2}{2}\right]_{x_A}^{x_B} = -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2 \qquad (16)$$

Es conveniente recordar este resultado. Nótese que en este ejemplo el trabajo no depende de la masa.

<u>Ejemplo</u> 2. Un cuerpo de masa m se mueve en línea recta hacia el centro de la Tierra, de masa M. Calcular el trabajo hecho por la fuerza de atracción gravitatoria, entre dos puntos situados a distancias d y D del centro de la Tierra. (Figura 21).

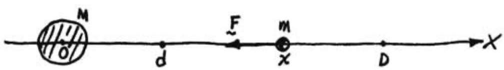


Figura 21

Tomemos el origen de coordenadas en el centro de la Tierra, con objeto de que la coordenada x coincida con la distancia al centro de la Tierra. La fuerza es

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{x^2}\,\hat{i}$$

o sea,

$$F(x) = -\frac{GMm}{x^2}$$

Aplicando (15)

$$W = \int_D^d \left(-\frac{GMm}{x^2}\right) dx = \left[GMm\,\frac{1}{x}\right]_D^d = GMm\,\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D}\right) \qquad (17)$$

En el caso particular en que el cuerpo provenga del infinito ($D=\infty$), (17) se reduce a

$$W = \frac{GMm}{d} \qquad (18)$$

Nótese que aunque el desplazamiento sea infinito, el trabajo no necesariamente es infinito. El resultado (18) se puede utilizar, con cierto grado de aproximación, cuando el cuerpo provenga de una distancia mucho muy grande D, tal que pueda despreciarse el término $\frac{1}{D}$ en (17).

<u>Ejemplo</u> 3. Calcular el trabajo hecho por el peso de una partícula de masa m, al ascender o descender verticalmente una distancia h. (Figuras 22a y 22b)

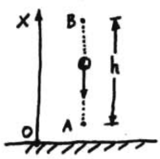


Figura 22a

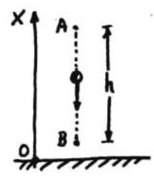


Figura 22b

Tomando el eje X verticalmente hacia arriba se tiene $\vec{F} = -mg\hat{i}$ de donde $F(x) = -mg$

$$W = \int_{x_A}^{x_B} (-mg)dx = -mg(x_B - x_A)$$

Si la partícula asciende, $x_B - x_A = h$ y $W = -mgh$

Si la partícula desciende, $x_B - x_A = -h$ y $W = +mgh$

Estos resultados coinciden con los que obtuvimos anteriormente.

(II) Trabajo hecho por una fuerza constante en el plano.

Sea $\vec{F}$ una fuerza constante, y Γ una trayectoria dada que pasa por los puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$. Escojamos un sistema de coordenadas cartesianas, con su eje Y en la misma dirección que la fuerza (Figura 23)

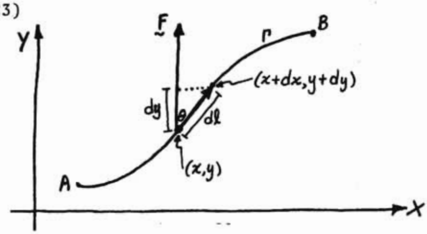


Figura 23

(obviamente $\vec{F}$ no es la única fuerza aplicada sobre la partícula; de ser así la trayectoria tendría forma parabólica. Se supone que hay fuerzas adicionales cuyo efecto, aunado al de $\vec{F}$, es dirigir a la partícula según la curva Γ).

En la Figura 23 vemos que en cualquier tramo de la trayectoria se cumple que

$$dl \cos\theta = dy$$

Por consiguiente, el trabajo viene dado por

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B F\ dl\ \cos\theta = \int_{y_A}^{y_B} F dy = F(y_B - y_A) \tag{19}$$

Introduciendo el vector desplazamiento $\vec{d}$ entre A y B :

$$\vec{d} = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\ \hat{j} \tag{20}$$

y tomando en cuenta que $\vec{F} = F\hat{j}$, (19) equivale a

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} \tag{21}$$

Esta fórmula incluye el caso particular en que el desplazamiento es directo (Ecuación (10)).

En virtud de que el desplazamiento neto $\vec{d}$ no depende del camino seguido, sino únicamente de los puntos terminales A y B, la fórmula (21) es válida sea cual fuere la forma de la trayectoria (Figura 24)

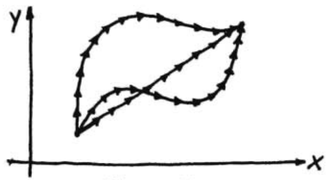


Figura 24

Esta propiedad implica que una fuerza constante es una fuerza conservativa.

Por (19) se tiene además que el trabajo es el mismo entre dos niveles y_A y y_B fijos (Figura 25).

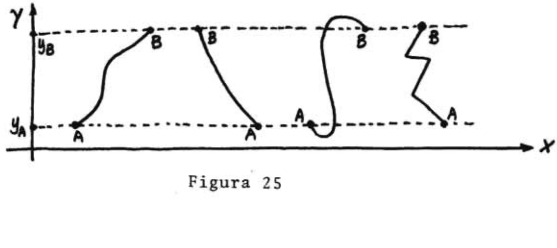


Figura 25

(III) Trabajo hecho por una fuerza normal. Una fuerza que es siempre perpendicular a $d\vec{r}$ no efectúa trabajo ya que $\vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ idénticamente, independientemente del valor de $\vec{F}$ (Figura 26)

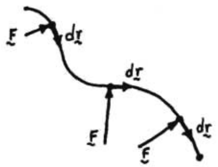


Figura 26

Figura 27

(IV) Trabajo hecho por la fricción.

Supongamos que la partícula se mueve sobre una superficie horizontal, que presenta una fuerza de fricción de magnitud constante f. Como la fuerza de fricción es en todo punto opuesta a la dirección del movimiento, $\vec{f}$ y $d\vec{r}$ forman siempre un ángulo de 180° y

$$\vec{f}\cdot d\vec{r} = f dl \cos 180° = -f\, dl$$

Por lo tanto, el trabajo de la fuerza de fricción es

$$W = \int_A^B (-f dl) = -f \int_A^B dl$$

Ahora bien, la integral $\int_A^B dl$ es la suma de las longitudes de todos los desplazamientos pequeños $d\vec{r}$, es decir, es igual a la longitud L_{AB} del tramo de la trayectoria limitado por los puntos A y B:

$$W = -fL_{AB} \qquad (22)$$

El trabajo de la fricción es siempre negativo, y depende de la forma de la trayectoria (ya que a diferentes formas corresponden en general diferentes longitudes L_{AB}). Esto significa que la fuer za de fricción es una fuerza no-conservativa.

5. Ejemplos de aplicación del teorema trabajo-energía cinética.

Ejemplo 1. Un cable ligero arrastra un bloque de masa m sobre una superficie horizontal con coeficiente de fricción μ. Determinar la velocidad del bloque, después de que ha recorrido una distancia d a partir del reposo. Suponga que la tensión en el cable es conocida e igual a T (Figura 28).

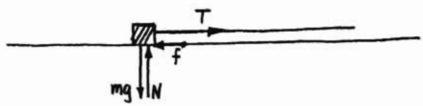


Figura 28

Denotando por A y B los puntos inicial y final del recorrido considerado, con $\overline{AB} = d$, tenemos para la diferencia de energías cinéticas entre ambos puntos:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2 = \frac{1}{2} mv_B^2 \qquad (23)$$

(v_A = 0 puesto que el bloque parte del reposo; v_B es la cantidad por determinar)

Por el otro lado, el trabajo de la fuerza total entre A y B se compone de los siguientes trabajos:

Trabajo de la normal N = 0

Trabajo del peso = 0

Trabajo de la tensión T = + T d

Trabajo de la fricción f = - f d = $-\mu mgd$

Sumando las cuatro contribuciones,

$$W = Td - \mu mgd \qquad (24)$$

Por el teorema $W = \Delta E_k$ se obtiene, igualando (23) y (24),

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = Td - \mu mgd$$

de donde

$$v_B = \sqrt{\frac{2}{m}(T - \mu mg)\, d}$$

Ejemplo 2. En la figura 29 se muestra un bloque de masa m sobre una superficie inclinada. Si se abandona el bloque desde el reposo en la posición que se muestra, ¿Cuál será la máxima compresión del resorte? La constante del resorte es k y el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano inclinado es μ.

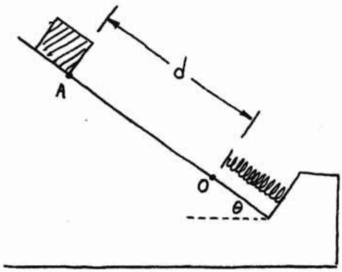


Figura 29

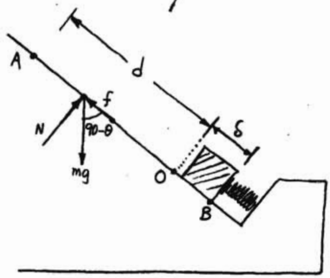


Figura 30

Tomemos un eje X dirigido hacia arriba del plano inclinado, con su origen en la posición de equilibrio del resorte. Las fuerzas que realizan trabajo sobre el bloque entre A y B (Ver Figura 30) son: la fricción, el peso y la fuerza del resorte (esta última hace trabajo solamente entre O y B).

Trabajo del peso entre A y B = $+ mg \cos(90-\theta)(d + \delta)$

Trabajo de la fricción entre A y B = $-\mu N(d + \delta)$

$$= -\mu mg \cos\theta \cdot (d + \delta)$$

Trabajo del resorte entre A y B = Trabajo del resorte entre O y B

$$= -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = -\frac{1}{2}k\delta^2 + 0 = -\frac{1}{2}k\delta^2$$

El trabajo de la fuerza total entre A y B es:

$$W = mg\ \text{sen}\theta\ (d+\delta) - \mu mg\ \cos\theta\ (d+\delta) - \frac{1}{2}k\delta^2 \qquad (25)$$

Por otra parte,

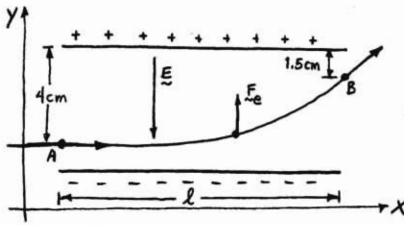
$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = 0 - 0 = 0 \qquad (26)$$

Igualando W y ΔE_k obtenemos

$$mg(d+\delta)\ (\text{sen}\theta - \mu\cos\theta) - \frac{1}{2}k\delta^2 = 0$$

Esta es una ecuación de segundo grado para δ, cuya raíz positiva es la solución del problema.

<u>Ejemplo 3.</u> Un electrón penetra al campo eléctrico constante de un capacitor de placas paralelas, por un punto situado a 4 cm de la placa superior positiva, con una velocidad de 2×10^6 m/s. El electrón describe una trayectoria parabólica dentro del capacitor, emergiendo del campo por un punto situado a 1.5 cm de la placa superior. Calcular su velocidad en el punto de salida, suponiendo que la intensidad del campo eléctrico es E = 2 500 N/C.



El trabajo hecho por la fuerza eléctrica es $W = \vec{F}\cdot\vec{d}$

Pero,

$\vec{F} = q\vec{E} = +\ eE\ \hat{j}$

en donde $e = 1.6\times10^{-19}$C, y

$\vec{d} = l\hat{i} + 2.5\ \text{cm}\ \hat{j} = \vec{AB}$

Entonces,

$$W = eE\ 2.5\text{cm} = 1.6\times10^{-19}\text{C}\cdot 2{,}500\ \frac{\text{N}}{\text{C}}\cdot 2.5\ 10^{-2}\text{m}$$

$$= 10^{-17}\ \text{J}$$

Por otra parte,

$$\Delta E_C = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}\ 9x10^{-31}kgx(2x10^6\ \frac{m}{s}\ )^2$$

$$= \frac{1}{2}mv_B^2 - 1.8x10^{-18}J$$

Entonces

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - 1.8x10^{-18}J = 10^{-17}J$$

de donde

$$v_B = \sqrt{\frac{2}{m}\ (11.8x10^{-18}J)} = 5x10^6\ \frac{m}{s}$$

Ejemplo 4. Un sistema formado por un bloque de masa m y dos resortes idénticos de constante k, se abandona desde la situación mostrada en la Figura 31.

Existe una fuerza de fricción entre el bloque y la superficie horizontal (coeficiente μ). (a) ¿A qué distancia D' del origen alcanza a llegar el bloque en su primera pasada por el origen? (Figura 32).

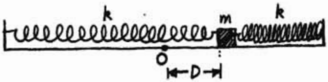


Figura 31

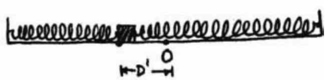


Figura 32

El trabajo hecho por un resorte en un desplazamiento de x_A a x_B es $-\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2$. Para el resorte de la izquierda tenemos:

$$\text{trabajo} = -\frac{1}{2}kD'^2 + \frac{1}{2}kD^2 \quad (\text{entre } x_A = +D \text{ y } x_B = -D') \tag{27}$$

El resorte de la derecha hace el mismo trabajo . Por lo tanto

$$\text{Trabajo de los resortes} = -kD'^2 + kD^2$$

$$\text{Trabajo de la fricción} = -f(D+D') = -\mu mg(D + D')$$

$$W = \text{trabajo de la fuerza total} = -kD'^2 + kD^2 - \mu mg(D + D')$$

servativo".

Un ejemplo de un campo de fuerzas no-conservativo es el campo descrito por la expresión sencilla:

$$\vec{F}=x\hat{j} \qquad 0\leq x\leq D;\ 0\leq y<\infty \tag{29}$$

La región de definición de este campo es una franja vertical en el plano XY, de extensión infinita y anchura D. La fuerza asociada a cada punto (x,y) de la región, apunta en la dirección vertical, y su magnitud depende solamente de la abscisa x del punto. En la figura 33 se han trazado algunas líneas de fuerza, siguiendo la convención de representar gráficamente la magnitud de la fuerza por medio de la densidad de las líneas de fuerza.

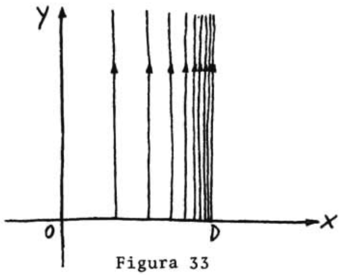


Figura 33

Para demostrar que el campo (29) es no-conservativo calcularemos el trabajo entre dos puntos A y B a lo largo de dos trayectorias diferentes, mostrando que estos trabajos son diferentes.

Sean $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ los puntos terminales considerados, y tomemos las trayectorias Γ y Γ' ilustradas en las Figuras 34 y 35.

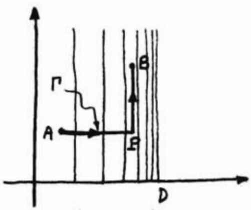


Figura 34

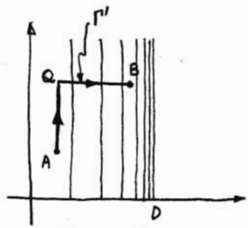


Figura 35

El campo no hace trabajo en las porciones horizontales AP y QB de Γ y Γ', por estar $\vec{F}$ perpendicular a $d\vec{r}$ en todo punto de éstas. Por consiguiente , para la trayectoria Γ se tiene

$$W_{\Gamma}\ (A\rightarrow B) = W_{\Gamma}\ (A\rightarrow P) + W_{\Gamma}\ (P\rightarrow B) = W_{\Gamma}\ (P\rightarrow B)$$

Pero $\vec{F}$ es constante en el segmento PB, siendo su valor $\vec{F} = x_B\hat{j}$. Utilizando la expresión $W = \vec{F}\cdot\vec{d}$ para el trabajo realizado por una fuerza constante $\vec{F}$ en un desplazamiendo $\vec{d}$, que en este caso se puede escribir $\vec{d} = \vec{PB} = (y_B - y_A)\ \hat{j}$, obtenemos

$$W_{\Gamma}\ (P\rightarrow B) = \vec{F}\cdot\vec{d} = (x_B\hat{j})\cdot\ (y_B - y_A)\hat{j} = x_B(y_B - y_A)$$

Análogamente se encuentra para la trayectoria Γ',

$$W_{\Gamma'}\ (A\rightarrow B) = W_{\Gamma'}\ (A\rightarrow Q) + W_{\Gamma'}\ (Q\rightarrow B) = W_{\Gamma'}\ (A\rightarrow Q) = x_A(y_B - y_A)$$

Como $x_A \neq x_B$ por su posición, se sigue que

$$W_{\Gamma}\ (A\rightarrow B) \neq W_{\Gamma'}\ (A\rightarrow B)$$

lo cual demuestra que el campo de fuerzas es no-conservativo.

Por otro lado, $\Delta E_k = 0$ y entonces

$$-kD'^2 - \mu mgD' + kD^2 - \mu mg\ D = 0$$

La raíz positiva de esta ecuación cuadrática para D' es la solución.

5. A través de este capítulo hemos hecho una distinción entre fuerzas conservativas y no-conservativas, en conexión con el cálculo del trabajo por medio de una integral de línea. Hemos derivado el teorema trabajo-energía cinética, el cuál es válido para cualquier tipo de fuerza total, sea conservativa o no. ¿Cuál es entonces el objeto de la distinción entre ambos tipos de fuerzas? Para aclarar esta cuestión nos proponemos examinar algunas propiedades del movimiento de partículas sujetas a fuerzas conservativas que, como veremos, muestran una simplicidad que no poseen los movimientos bajo fuerzas no-conservativas.

En vista de que la única fuerza no-conservativa que hemos tratatado hasta ahora es la fuerza de fricción, empezaremos por proporcionar otro ejemplo de este tipo de fuerzas.

Ejemplo de una fuerza no-conservativa.

Como se sabe, un campo de fuerzas es una región del espacio a cuyos puntos se les asocia un vector fuerza. Cuando una partícula se mueve dentro de un campo de fuerzas, la fuerza del campo realiza trabajo sobre la partícula, al que nos podemos referir como "trabajo hecho por el campo". Si el trabajo hecho por el campo no depende de la trayectoria de la partícula, el campo se denomina "campo conservativo". Si el trabajo es diferente para trayectorias diferentes (entre dos puntos dados), el campo es "no-con servativas.

2.2 Energía potencial

1. Derivar las propiedades fundamentales de las fuerzas conservativas;
2. Definir energía potencial;
3. Derivar el teorema de la conservación de la energía;

1. Mencionemos algunas propiedades de las fuerzas conservativas.

Teorema 1. Si una partícula pasa dos o más veces por un mismo punto A del espacio, bajo la acción de una fuerza total conservativa, entonces su energía cinética es siempre la misma en este punto.

Consideremos el caso ilustrado en la Figura 36.

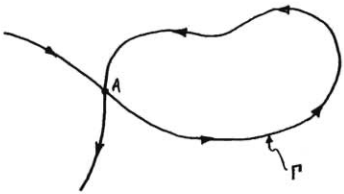


Figura 36

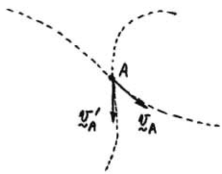


Figura 37

Designando con $\vec{v}_A$ y $\vec{v}'_A$ a las velocidades en los dos instantes en que la partícula pasa por A el teorema afirma que $\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_A'^2$, o bien , que $v_A = v'_A$.

El teorema puede expresarse en otros términos, para lo cual consideremos la porción cerrada Γ de la trayectoria, descomponiéndola en dos partes Γ_1 y Γ_2 , con ayuda de otro punto arbitrario B (Figura 38).

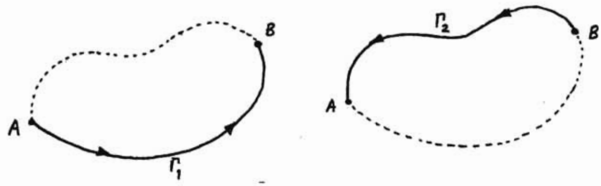


Figura 38

Si la partícula gana energía cinética en el trayecto entre A y B a lo largo de Γ_1 , entonces al retornar de B a A a lo largo de Γ_2 pierde energía cinética, en una cantidad que compensa exactamente la ganancia.

Demostración. Sean

v_A = rapidez en A al inicio de Γ_1.

v_B = rapidez en B al final de Γ_1 (o al inicio de Γ_2).

v_A' = rapidez en A al final de Γ_2 .

La demostración está basada en las propiedades generales del trabajo, en el teorema trabajo-energía cinética, y en la suposición de que la fuerza total es conservativa.

Por el teorema trabajo-energía cinética aplicado a Γ (es decir, al ciclo $A \xrightarrow{\Gamma_1} B \xrightarrow{\Gamma_2} A$) tenemos

$$W_\Gamma\ (A \rightarrow A) = \tfrac{1}{2}mv_A'^{\,2} - \tfrac{1}{2}mv_A^2 \tag{32}$$

Por la propiedad de aditividad del trabajo,

$$W_\Gamma (A \rightarrow A) = W_{\Gamma_1}\ (A \rightarrow B) + W_{\Gamma_2}\ (B \rightarrow A) \tag{33}$$

El segundo término a la derecha de (35) se puede escribir

$$W_{\Gamma_2}\ (B \rightarrow A) = -W_{\Gamma_2}(A \rightarrow B) \tag{34}$$

Sustituyendo (34) en (33),

$$W_{\Gamma}(A \rightarrow A) = W_{\Gamma_1}(A \rightarrow B) - W_{\Gamma_2}(A \rightarrow B) \tag{35}$$

Pero la propiedad de conservatividad de la fuerza significa que

$$W_{\Gamma_1}(A \rightarrow B) = W_{\Gamma_2}(A \rightarrow B) \tag{36}$$

Tomando (36) en cuenta, (35) queda

$$W_{\Gamma}(A \rightarrow A) = 0, \tag{37}$$

que es equivalente según (32) a

$$\tfrac{1}{2}mv_A'^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 = 0$$

de donde $\frac{1}{2}mv_A'^2 = \frac{1}{2}mv_A^2$ ó $v_A' = v_A$.

Teorema 2. El trabajo hecho por una fuerza total conservativa a lo largo de una trayectoria cerrada es igual a cero.

Ejemplos ilustrativos del teorema 1:

Ejemplo 1. Se ha demostrado anteriormente que, en un movimiento rectilíneo, toda fuerza que dependa solamente de la posición de la partícula es una fuerza conservativa. En particular la fuerza ejercida por un resorte lineal y la fuerza del peso, son conservativas. El teorema 1 nos dice entonces que una partícula actuada por estas fuerzas, posee la misma energía cinética o rapidez en un mismo punto A (ver Figuras 39,40 y 41), independientemente del instante en el que pasa por él, o de la dirección del movimiento en ese punto.

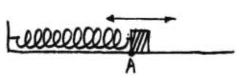


Figura 39

Figura 40

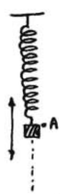
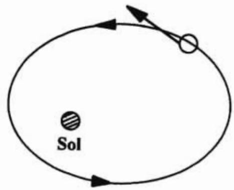


Figura 41

Ejemplo 2. Como lo demostraremos más adelante, diremos aquí que la fuerza gravitacional es conservativa. De ello se deduce por ejemplo , que un planeta en su órbita elíptica alrededor del Sol, posee una rapidez bien definida en cada punto de su órbita, siendo esta rapidez la misma en un punto dado, para sucesivas revoluciones alrededor el Sol.



2. Los teoremas mencionados anteriormente no son válidos cuando la fuerza total es no-conservativa. Para darse cuenta de ello basta considerar el caso en que la fuerza total incluya una fuerza de fricción, que hará que la fuerza total sea no-conservativa, aunque las otras fuerzas que componen a la fuerza total sí sean conservativas. En un movimiento en una curva cerrada, la fricción va disminuyendo constantemente la energía cinética de la partícula, en proporción a la distancia recorrida por ésta. Esto tiene por consecuencia que al retornar la partícula a su punto de partida, su rapidez sea menor que su rapidez al inicio del movimiento, violándose por consiguiente el teorema 1.

El contenido de los teoremas demostrados para fuerzas conservativas, puede formularse en una forma alternativa más conveniente y de mayor profundidad física, introduciendo un concepto nuevo: la energía potencial.

Supongamos que la partícula interactúa con cierto sistema externo, a través de una fuerza de interacción $\vec{F}$ conservativa.
Es posible entonces construir una función de la posición llamada energía potencial, conforme a la siguiente definición.

Definición: La energía potencial de una partícula en un punto P, debida a su interacción con un sistema externo, es igual al trabajo W $(P \rightarrow P_0)$ hecho sobre la partícula por la fuerza de interacción, al desplazar a la partícula desde P hasta cierta posición de referencia P_0 escogida arbitrariamente, manteniéndose fijo el sistema externo durante este movimiento.

Discusión.

(A) La energía potencial, que se denotará por E_p, está definida exclusivamente para fuerzas conservativas. Para calcular la energía potencial en un punto P, debida a la fuerza de interacción $\vec{F}$ con el sistema externo, debe seleccionarse primeramente un punto de referencia P_0.

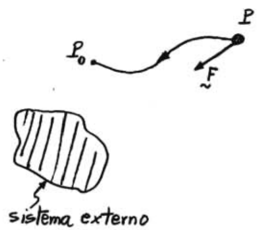


Figura 42

A continuación se escoge una trayectoria conveniente entre P y P_0. Se calcula entonces el trabajo hecho por $\vec{F}$ entre P y P_0 a lo largo de esta trayectoria. Este trabajo es igual a la energía potencial asociada al punto P:

$$E_p(P) = \int_P^{P_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (38)$$

o bien,

$$E_p(P) = W\ (P \rightarrow P_0) \tag{39}$$

No es necesario especificar en (38) la forma de la trayectoria, ya que la condición para la existencia de la energía potencial es que la fuerza sea conservativa, en cuyo caso el trabajo no depende de la forma de la trayectoria seleccionada entre P y P_0.

(B) El significado del punto de referencia P_0 es el siguiente: Cuando la partícula se encuentra en P_0, su energía potencial vale, de acuerdo con (38) ó (39):

$$E_p(P_0) = \int_{P_0}^{P_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W(P_0 \rightarrow P_0) = 0.$$

Es decir, fijar el punto de referencia P_0, es equivalente a definir el nivel cero de la energía potencial.

(C) En una dimensión se tiene para la energía potencial de una partícula debida a la fuerza conservativa F(x):

$$E_p(x) = \int_{x}^{x_0} F(x)\ dx \quad \left(x_0\text{: punto de referencia}\right) \tag{40}$$

o bien

$$E_p(x) = W(x \rightarrow x_0). \tag{41}$$

Así tenemos por ejemplo, para la fuerza de un resorte lineal,

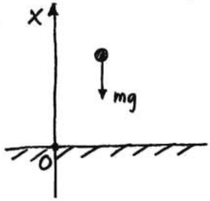
$$F(x) = -kx$$

$$E_p\ (x) = \int_{x}^{x_0} (-kx)dx = -\tfrac{1}{2}kx_0^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

Escogiendo el punto de referencia en el punto de equilibrio del resorte, $x_0 = 0$, la expresión de la energía potencial queda en una forma simple:

$$E_p(x) = \tfrac{1}{2}kx^2 \tag{42}$$

Para la fuerza del peso, $\vec{F} = -mg\,\hat{j}$ se tiene (Figura 43)



$$F(x) = -mg = \text{constante}$$

$$E_p(x) = \int_x^{x_0}(-mg)\,dx = -mgx_0 + mgx$$

Figura 43

Escogiendo el punto de referencia en $x_0 = 0$ resulta

$$E_p(x) = mgx \tag{43}$$

Conviene recordar las expresiones (42) y (43), con sus puntos de referencia respectivos. (42) se denomina energía potencial elástica, y (43) energía potencial gravitacional (cerca de la Tierra)

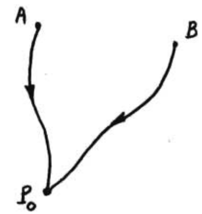
(D) En virtud de que la energía potencial se ha definido como un trabajo, su unidad es el Joule.

(E) Relación trabajo-energía potencial.

El trabajo hecho por una fuerza conservativa entre dos puntos A y B, es igual al negativo de la variación de la energía potencial entre A y B:

$$W = -\Delta E_p \tag{44}$$

Por la definición de energía potencial tenemos



$$E_p(A) = W(A \to P_0)$$

$$E_p(B) = W(B \to P_0)$$

Entonces,

$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = W(B \rightarrow P_0) - W(A \rightarrow P_0)$$
$$= W(B \rightarrow P_0) + W(P_0 \rightarrow A) = W(B \rightarrow A)$$
$$= -W(A \rightarrow B)$$

Para calcular $W(A \rightarrow B)$ no es necesario pasar por intermedio de P_0 Puede tomarse cualquier trayectoria entre A y B. El resultado no depende de la posición del punto de referencia P_0.

3. Según el teorema trabajo-energía cinética, el trabajo hecho sobre una partícula por la suma de todas las fuerzas que actúan sobre ella, es igual a la variación en su energía cinética:

$$W(A \rightarrow B) = \Delta E_k = E_k(B) - E_k(A) \qquad (45)$$

Por otro lado, si las fuerzas que realizan trabajo sobre la partícula son todas conservativas, puede definirse una energía potencial y expresar el trabajo $W(A \rightarrow B)$ también como el decremento de la energía potencial de acuerdo con (44):

$$W(A \rightarrow B) = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B) \qquad (46)$$

Combinando (45) y (46) se sigue que

$$\Delta E_k = -\Delta E_p \qquad (47)$$

o sea,

$$E_k(B) - E_k(A) = E_p(A) - E_p(B) \qquad (48)$$

La relación (48) expresa que el incremento de la energía cinética de una partícula va acompañado de un decremento de la energía potencial (o viceversa), de la misma magnitud.

Conviene escribir la ecuación (48) en la forma

$$E_k(A) + E_p(A) = E_k(B) + E_p(B) \qquad (49)$$

de tal manera que la suma $E_k + E_p$ tiene el mismo valor en el punto A que en el punto B. Como A y B son dos puntos cualesquiera, la suma E_k+E_p tiene el mismo valor en cualquier punto del movimiento.

Definición. La energía total E de una partícula es la suma de sus energías cinética y potencial

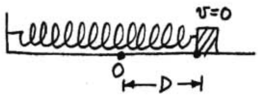
$$E = E_k + E_p \tag{50}$$

Teorema de conservación de la energía total: Si las fuerzas que realizan trabajo sobre una partícula son todas conservativas, la energía total de la partícula debida a éstas fuerzas, se mantiene constante.

Ejemplo 1. La energía total de una partícula de masa m en el extremo de un resorte lineal de constante k es, según (42),

$$E = E_k+E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Supongamos que la partícula se suelta cuando la deformación del resorte es D (Figura 44). En este estado su energía total vale



$$E = \frac{1}{2}m.0^2 + \frac{1}{2}kD^2 = \frac{1}{2}kD^2$$

Figura 44

En cualquier otro estado, descrito por la posición x y la velocidad v, la energía total conserva el mismo valor, por lo que

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kD^2 \tag{51}$$

Esta ecuación, que expresa la conservación de la energía total en este caso, relaciona las variables de posición y velocidad.

Si nos preguntamos cuál será la velocidad de la partícula al pasar por x=0 obtendremos de (51):

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kD^2 \qquad \text{(en } x=0)$$

de donde

$$v = \sqrt{\frac{kD^2}{m}} \qquad \text{(en } x=0\text{)}$$

La energía total es puramente potencial en x=D, en donde v=0. Conforme la partícula se mueve hacia el origen, su energía potencial va disminuyendo y su energía cinética va aumentando, de tal manera que el incremento de la cinética compensa el decremento de la potencial, manteniéndose constante la suma de ambos tipos de energía. En x=0 la energía total es puramente cinética. Poniendo v=0 en (51) hallamos

$$\tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kD^2$$

de donde x= +D y x= -D, es decir, la partícula alcanza a llegar a x=-D, en donde se detiene momentáneamente y en cuyo estado la deformación del resorte corresponde a su compresión máxima. Se deduce que el movimiento es oscilatorio entre las posiciones extremas $x=\pm D$.

Este ejemplo muestra qué clase de información puede obtenerse mediante la conservación de la energía total: su aplicación es de utilidad cuando se desea investigar la variación de la velocidad con la posición; la variable tiempo no aparece explícitamente.

Ejemplo 2. Dos de las interacciones fundamentales en la naturaleza, la interacción gravitacional y la interacción eléctrica, tienen la propiedad de ser conservativas.. Consecuentemente, existen energías potenciales asociadas a estas interacciones, que se denominan energía potencial gravitacional y energía potencial eléctrica, respectivamente.

Tomemos el caso de la fuerza eléctrica para demostrar la propiedad mencionada. Consideremos una partícula de carga q, en interacción eléctrica con otra partícula fija de carga Q (figura 45).

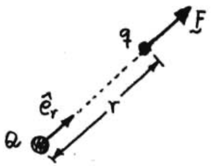


Figura 45

Designemos con r a la distancia entre q y Q, y con $\hat{e}_r$ a un vector unitario en la dirección radial de Q hacia q (o sea, en la dirección en la que crece la variable r). La fuerza eléctrica sobre q viene dada por la Ley de Coulomb.

$$\vec{F} = k\,\frac{Q\,q}{r^2}\,\hat{e}_r = F(r)\,\hat{e}_r \qquad (52)$$

en donde $k = 9\times10^9 Nm^2C^{-2}$ y $F(r) = kQq/r^2$.

Imaginemos ahora que q se desplaza entre dos puntos A y B a distancias r_A y r_B de Q respectivamente, siguiendo los caminos Γ_1 y Γ_2 escogidos arbitrariamente (Figura 46)

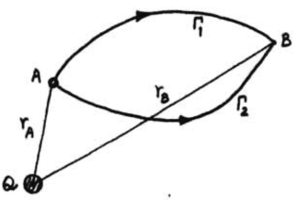


Figura 46

Hay que demostrar que el trabajo de $\vec{F}$ dada por(52), es el mismo para Γ_1 que para Γ_2 :

$$W_{\Gamma_1}(A \rightarrow B) = W_{\Gamma_2}(A \rightarrow B).$$

Tracemos con centro en Q dos arcos de circunferencia, de radios r y r+dr, que intersectan a Γ_1 y Γ_2 en puntos conectados por los pequeños desplazamientos $d\vec{r}^{(1)}$ y $d\vec{r}^{(2)}$ como se muestra en la (Figura 47). El trabajo $W^{(1)}$ hecho por $\vec{F}$ en $d\vec{r}^{(1)}$ es

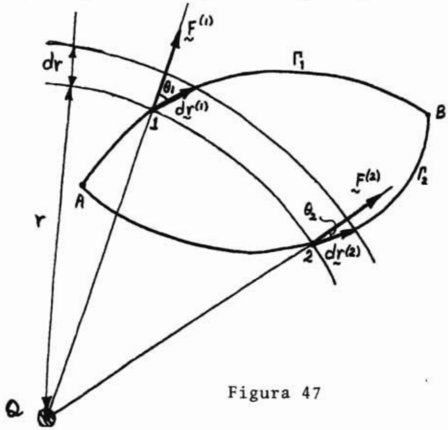


Figura 47

$$\delta W^{(1)} = \vec{F}^{(1)} \cdot d\vec{r}^{(1)}$$

y el trabajo $\delta W^{(2)}$ hecho en $d\vec{r}^{(2)}$ es

$$\delta W^{(2)} = \vec{F}^{(2)} \cdot d\vec{r}^{(2)},$$

siendo $\vec{F}^{(1)}$ y $\vec{F}^{(2)}$ las fuerzas evaluadas en los puntos 1 y 2, respectivamente. Tomando en cuenta que las magnitudes de $\vec{F}^{(1)}$ y $\vec{F}^{(2)}$ son iguales por estar los puntos 1 y 2 a la misma distancia de Q tendremos

$$\delta W^{(1)} = F(r)\, dl_1 \cos\theta_1 \quad , \quad \delta W^{(2)} = F(r)\, dl_2 \cos\theta_2$$

Pero

$$dl_1 \cos\theta_1 = dl_2 \cos\theta_2 = dr$$

Por lo tanto,

$$\delta W^{(1)} = \delta W^{(2)} = F(r)dr \qquad (53)$$

De aquí podemos reconocer que el trabajo de $\vec{F}$ será el mismo tanto para Γ_1 como Γ_2, examinando la Figura 48.

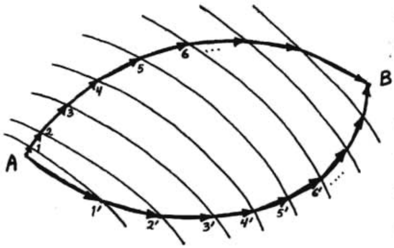


Figura 48

La suma de los trabajos hechos en los pequeños desplazamientos sucesivos 1-2,2-3,3-4,... etc, es igual por (53), a la suma de los trabajos hechos en 1'-2',2'-3',3'-4',... etc, lo que significa que

$$W_{\Gamma_1}(A \rightarrow B) = W_{\Gamma_2}(A \rightarrow B),$$

es decir, que la fuerza es conservativa. Usando (53) podemos escribir

$$W(A \rightarrow B) = \int_A^B \delta W = \int_A^B F(r)dr \tag{54}$$

y usando (52) resulta

$$W(A \rightarrow B) = \int_{r_A}^{r_B} \frac{kQq}{r^2}\, dr = kQq\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \tag{55}$$

De (55) podemos sacar la expresión para la energía potencial eléctrica del sistema de dos cargas puntuales Q y q:

$$E_p\ (P) = W(P \rightarrow P_0)$$
$$E_p\ (r) = kQq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \tag{56}$$

en donde r y r_0 corresponden a P y al punto de referencia P_0, respectivamente. Escogiendo P_0 en el infinito ($r_0=\infty$), (56) se simplifica a

$$E_p(r) = +\frac{kQq}{r} \tag{57}$$

Debido a que la fuerza gravitacional entre dos masas puntuales M y m, se expresa matemáticamente de una forma similar a la fuerza eléctrica, a saber,

$$\vec{F} = F(r)\,\hat{e}_r \quad \text{con} \quad F(r) = -\frac{GMm}{r^2},$$

la energía potencial gravitacional está dada por

$$E_p(P) = W(P \rightarrow P_0) = \int_P^{P_0} F(r)dr \tag{58}$$

$$= \int_r^{r_0} \left(- \frac{GMm}{r^2}\right) dr = GMm \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

Escogiendo de nuevo el punto de referencia en el infinito ($r_0 = \infty$), (58) se simplifica a

$$E_p(r) = - \frac{GMm}{r} \tag{59}$$

Ejemplo 3. ¿Con qué velocidad debe lanzarse un proyectil en la superficie de la Tierra, para que el proyectil "escape" a la fuerza de atracción terrestre? (Figura 49).

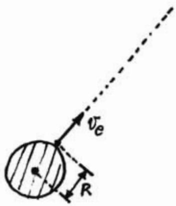


Figura 49

Observaciones:

(a) Teóricamente la fuerza de atracción terrestre se extiende hasta el infinito, aunque prácticamente se vuelve insignificante a distancias muy grandes de la Tierra, en donde se puede decir que el proyectil ha "escapado" a la fuerza gravitacional.

(b) En el problema se desea que el proyectil no invierta la dirección de su velocidad, para lo cual pediremos que v=0 en $r=\infty$

(c) La fórmula (59) puede usarse también para la energía potencial de dos esferas homogéneas de masas M y m, o bien para una esfera homogénea y una partícula, como en el presente problema. En estos casos la distancia r debe medirse desde los centros de las esferas.

Ahora bien, la energía total del proyectil a una distancia r del centro de la Tierra es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

(m = masa del proyectil, v = velocidad del proyectil, M=masa de la Tierra).

En el estado inicial del proyectil, r = R (radio de la Tierra), y $v = v_e$ (velocidad de escape a determinar). Por lo tanto

$$E_{inic} = \frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GMm}{R} \qquad (60)$$

En el estado final del proyectil, $r=\infty$ y v=0. Por lo tanto

$$E_{fin} = \frac{1}{2}m.0^2 - \frac{GMm}{\infty} = 0 \qquad (61)$$

Por conservación de la energía total, $E_{inic} = E_{fin}$, o sea,

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GMm}{R} = 0$$

de donde

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6\cdot 67\cdot 10^{-11}Nm^2/kg^2\cdot 6\cdot 10^{24}kg}{6.37.10^6m}}$$

$$\approx 11 \text{ km/s}.$$

Ejemplo 4. Supóngase que una partícula está bajo la acción de una fuerza conservativa $\vec{F}_c$, y una fuerza no conservativa $\vec{F}_{no-c}$. Demostrar que se cumple la relación

$$W_{no-c} = \Delta E,$$

En donde W_{no-c} es el trabajo realizado por la fuerza no-conservativa, entre dos estados para los cuales la diferencia de sus energías totales correspondientes es ΔE.

De acuerdo con el teorema trabajo-energía cinética, el trabajo ...

De acuerdo con el teorema trabajo-energía cinética, el trabajo de la fuerza total $\vec{F}_c + \vec{F}_{no-c}$, es igual a la variación de la energía cinética:

$$W_c + W_{no-c} = \Delta E_k$$

Pero a la fuerza conservativa $\vec{F}_c$ se le puede asociar una energía potencial conforme a la relación (44):

$$W_c = -\Delta E_p$$

De las dos relaciones anteriores se sigue

$$-\Delta E_p + W_{no-c} = \Delta E_k$$

o bien

$$W_{no-c} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta(E_k + E_p) = \Delta E$$

08. (Figura 02). Un bloque de 2.0 kg se coloca contra un resorte comprimido sobre una rampa sin fricción. El resorte, cuya constante elástica es de 1960 N/m, se comprime en 20 cm después de lo cual se suelta el bloque. ¿Cuán lejos subirá por la rampa antes de llegar a deternerse?

09. (Figura 03). El carro de una montaña rusa sin fricción parte del punto A con rapidez v_0. Supóngase que puede ser considerado como una partículo y que siempre se mantiene sobre su carril ¿Con qué rapidez pasará por los puntos B y C?

10. El clavo del problema 06. está situado a una distancia D por debajo del punto de suspensión. Demostrar que D debe valer por lo menos 0.6 L si se quiere que la bola dé una vuelta completa en un círculo cuyo centro sea el clavo.

11. (Figura 04). Dos niños están jugando a un juego en el cual tratan de pegarle a una cajita en el suelo, usando una pistola le balines accionada por un resorte y que está colocada horizontalmente sobre una mesa sin fricción. El primer niño comprime el resorte en 1.0 cm y el balín cae a 20 cm por delante del blanco, cuya distancia horizontal al borde de la mesa es de 2.0 m. ¿Cuánto deberá comprimir el resorte el segundo niño para que el mismo balín caiga dentro de la caja?

12. Una cadena de longitud 1 y masa uniformemente distribuida se apoya sobre una mesa sin fricción con la mitad de su longitud colgando desde el borde. Calcular (a) el trabajo que habrá que efectuar para que, al jalarla, quede totalmente sobre la mesa, (b) el trabajo que habrá que efectuar hasta que toda la cadena quede colgando. (c) Discutir por qué los resultados (a) y (b) eran de esperarse.

13. Un objeto de 1.0 kg está accionado por una fuerza $F = -3.0x - 5.0x^2$, donde F está dada un newton y x en metro. La energía potencial es cero en x = 0. (a) ¿Cuál es la energía del objeto en x = 2.0 m? (b) Si el objeto tiene una rapidez de 4.0 m/s en el sentido negativo cuando está en x = 5.0, describir su movimiento posterior.

2.3 Problemas

01. Se dispara verticalmente y hacia arriba una bala de 5 g con una pistola de resorte. Se encuentra que el resorte debe comprimirse por lo menos en 10 cm si se quiere que la bala alcance a un balancín que está a una altura de 20 m. ¿Cuál es la constante elástica del resorte?

02. Un proyectil de 10 kg se dispara directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 500 m/s. (a) ¿Cuál es la energía potencial del proyectil en el punto máximo de su trayectoria?, (b) ¿Cuál sería la máxima energía potencial si el proyectil hubiese sido disparado con un ángulo de 45° en lugar de haberlo hecho directamente hacia arriba?

03. Una moneda de 2.0 g se empuja hacia abajo apretándola contra un resorte vertical comprimiéndolo en 1.0 cm. La constante elástica del resorte es de 40 N/m ¿Hasta qué distancia de su posición original brincará la moneda si se le soltara?

04. Un bloque de 2.0 kg se deja caer desde una altura de 0.40 m sobre un resorte cuya constante elástica es 1960 N/m. Encontrar la distancia máxima en que se comprimiría el resorte. La fricción es despreciable.

05. Se fija un objeto a un resorte vertical y se le hace descender lentamente hasta su posición de equilibrio lo cual hace estirar al resorte en una cantidad d. Si el mismo objeto se fija al mismo resorte vertical y se le permite que caiga. ¿Cuál será la distancia máxima en que se estirará el resorte?

06. (Figura 01) La cuerda de la figura tiene una longitud L = 4.0 m. Cuando se suelta la bola, se balancea hacia abajo por el arco punteado ¿Cuál será su velocidad cuando llegue al punto más bajo de su movimiento?

07. Desde una ventana se arroja una pelota de 50 gr con una velocidad inicial de 8.0 m/s y con un ángulo de 30° por encima de la horizontal. Usando métodos de energía, determinar: (a) la energía cinética de la pelota en el máximo de su vuelo, (b) su rapidez cuando esté a 3.0 m por debajo de la ventana.

14. (Figura 05) Un pequeño bloque de masa m resbala sin fricción por un riel en forma de rizo. Si en P se encuentra en reposo, (a) ¿Cuál es la fuerza resultante que actúa sobre él en Q? (b) ¿A qué altura por encima de la base del rizo tendrá que soltarse el bloque para que la fuerza ejercida por él sobre el riel, en la cima del rizo, sea igual a su peso?

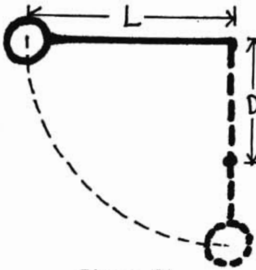


Figura 01

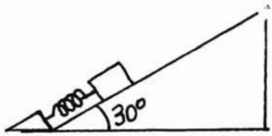


Figura 02

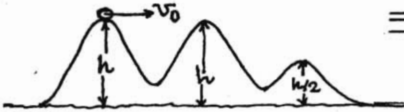


Figura 03

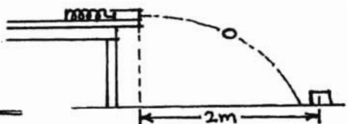


Figura 04

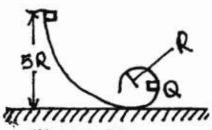


Figura 05

UNIDAD 3: POTENCIAL ELÉCTRICO

3.1 Potencial eléctrico;

3.2 Problemas.

Preparó: Guillermo González y Ricardo Vázquez.

Referencias:

D Halliday y R Resnick. Fundamentos de Física, CECSA, México, 1978. Capítulo 25.

S Gartenhaus, Física, Interamericana, México, 1979. Capítulo 21.

3.1 Potencial eléctrico

1. Definir potencial electrostático;
2. Derivar la expresión para el potencial de una carga puntual y de un sistema de cargas puntuales;
3. Calcular el potencial debido a un dipolo eléctrico;
4. Definir superficie equipotencial y demostrar que las líneas de fuerza son normales a las superficies equipotenciales;

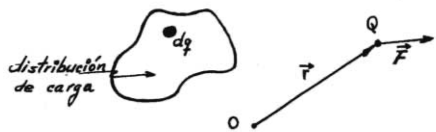
a) Determinar el campo eléctrico a partir del potencial;

b) Identificar la superficie de un conductor cargado con una superficie equipotencial.

1. Considérese una distribución estática de cargas y una partícula con carga Q que tiene libertad de movimiento. La distribución de carga produce un campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$, da tal manera que si Q está en $\vec{r}$, la fuerza eléctrica sobre Q es

$$\vec{F}(\vec{r}) = Q\vec{E}(\vec{r}) \qquad (1)$$

El campo eléctrico es conservativo porque es la superposición de los campos producidos por los elementos de carga en que puede ser dividida la distribución, y todos ellos son conservativos. Se sigue, entonces, que $\vec{F}(\vec{r})$ es un campo conservativo de fuerzas



Por lo estudiado en la sección 2.2, se sabe que la energía potencial en $\vec{r}$, asociada con el campo de fuerzas $\vec{F}$, viene dada por la expresión

$$E_p(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (2)$$

donde $\vec{r}_0$ es un punto de referencia fijo. Por ser $\vec{F}$ conservativa, la integral no depende de la trayectoria particular, seguida y E_p resulta ser un campo escalar definido en $\vec{r}$. Este campo representa el negativo del trabajo efectuado por $\vec{F}$ para llevar una partícula del punto r_0 al punto r.

Se define el potencial eléctrico en $\vec{r}$ como la energía potencial del punto $\vec{r}$ dividida por la carga Q de la partícula:

$$V(r) = \frac{1}{Q} E_p(r) \qquad (3)$$

De esta definición se desprende que el potencial eléctrico también es un campo escalar. Si se sustituye la ecuación (2) en la (3), se obtiene la expresión

$$V(\vec{r}) = -\frac{1}{Q}\int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (4)$$

El potencial eléctrico en el punto $\vec{r}$ es el negativo del trabajo por unidad de carga que desarrolla la fuerza eléctrica al llevar la partícula cargada del punto $\vec{r}_0$ al $\vec{r}$. Al reemplazar en esta última expresión la fuerza por el campo eléctrico, de acuerdo a la ecuación (1), el potencial se obtiene en términos de la integral de línea del campo eléctrico:

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{r} \qquad (5)$$

De acuerdo a esta expresión, el potencial es independiente del valos de la carga Q y de la trayectoria seguida para transportar a la partícula cargada de $\vec{r}_0$ a $\vec{r}$. Esto último se debe a que el campo eléctrico $\vec{E}$ es conservativo.

¨i la partícula Q es llevada del punto $\vec{r}_1$ al punto $\vec{r}_2$, ocurre un cambio en el potencial eléctrico. Designando simplemente por V_1 y V_2 los valores del potencial en los puntos r_1 y r_2, respectivamente, de la ecuación (3) se sigue que tal cambio de potencial está dado por

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{1}{Q} \left(E_p(\vec{r}_2) - E_p(\vec{r}_1) \right) \tag{6}$$

Se llama diferencia de potencial eléctrico (ddp) entre los puntos $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ a este cambio en el potencial. La diferencia de energías potenciales que aparece en esta última ecuación puede ser representada en términos de la fuerza eléctrica sobre la partícula como sigue. Partiendo de la ecuación (2), y utilizando la propiedad de aditividad de la integral, se tiene

$$E_p(\vec{r}_2) - E_p(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Entonces la ddp entre los puntos $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ tiene la expresión

$$\Delta V = -\frac{1}{Q} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{7}$$

Al igual que en el potencial eléctrico, en el caso de la ddp tampoco se hace referencia a la trayectoria que sigue la partícula al pasar de $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$, debido nuevamente a que el campo eléctrico es conservativo. Y también como en el caso del potencial, la ddp resulta ser independiente del valor de la carga eléctrica de la partícula. La ddp sólo depende del valor del campo eléctrico en la región en que se mueve la partícula (por supuesto, también depende de la posición de los puntos $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$). Este hecho implica que la ecuación (8) es válida aún cuando la partícula Q se mueva bajo la influencia de otras fuerzas de naturaleza no eléctrica, sean conservativas o no.

Supóngase que la partícula está sometida a una fuerza total $\vec{F}_T$ que es la combinación de una fuerza de carácter eléctrico, $\vec{F}$, causada por la acción del campo eléctrico sobre la partícula y una fuerza de naturaleza no eléctrica, $\vec{F'}$, atribuida a algún agente independiente del campo eléctrico:

$$\vec{F}_T = \vec{F} + \vec{F'} \tag{8}$$

El trabajo que la fuerza total realiza sobre la partícula al llevarla de $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ es

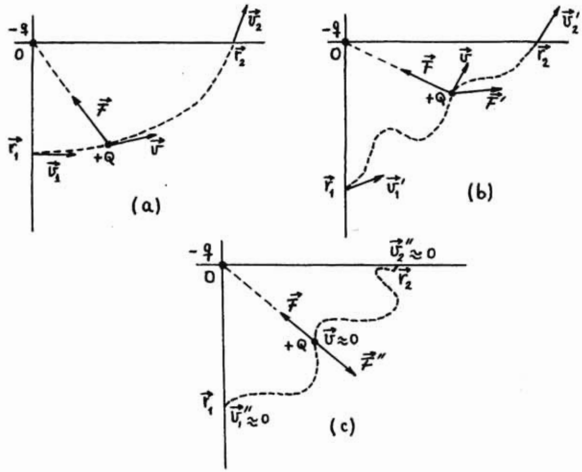
$$W_T = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_T \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F'} \cdot d\vec{r}$$

Por la ecuación (7), el primero de dos sumandos puede escribirse como el producto de la carga por la ddp, Luego

$$W_T = - Q\Delta V + W' \tag{9}$$

donde W' representa el trabajo realizado por la fuerza no eléctrica. Ya que ΔV sólo depende del campo eléctrico $\vec{E}$, el trabajo desarrollado por la fuerza eléctrica, $W = -Q\Delta V$, es el mismo, sin importar que otras fuerzas actúen sobre la partícula. Si la partícula es llevada de $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ por diferentes caminos, y si la fuerza $\vec{F'}$ no es conservativa, entonces W' no tendrá en general el mismo valor y, por lo tanto, el trabajo total será distinto de una trayectoria a otra.

Para ilustrar los anterior, considérense las siguientes situaciones:

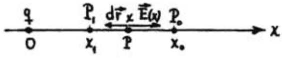


En (a) la partícula +Q es lanzada en el punto $\vec{r}_1$ con velocidad $\vec{v}_1$. La única fuerza que actúa sobre la partícula se debe a la carga puntual -q colocada en O. La partícula llega al punto $\vec{r}_2$ con velocidad $\vec{v}_2$. El trabajo realizado por $\vec{F}$ es $W = -Q\Delta V$. En (b) la partícula se lanza desde $\vec{r}_1$ con velocidad $\vec{v}_1'$. Llega al punto $\vec{r}_2$ con velocidad $\vec{v}_2'$. Además de la fuerza eléctrica, está presente una fuerza variable no conservativa $\vec{F}'$. La fuerza $\vec{F}$ realiza el trabajo $W = -Q\Delta V$ mientras que $\vec{F}'$ desarrolla un trabajo W'. En (c) la partícula sale de $\vec{r}_1$ con velocidad $\vec{v}_1'' \approx 0$. Aparte de $\vec{F}$, está presente una fuerza $\vec{F}''$ que equilibra casi exactamente a $\vec{F}$, dando por resultado que la partícula se desplaza con velocidad $\vec{v} \approx 0$ (proceso casiestático). La partícula llega al punto $\vec{r}_2$ con velocidad

$\vec{v}_2{}'' \approx 0$. Nuevamente el trabajo realizado por $\vec{F}$ es $W = -Q\Delta V$; y el realizado por $\vec{F}''$ es W'' distinto, en general, de W'. El trabajo total varía en cada caso siendo $-Q\Delta V$ en (a); $-Q\Delta V + W'$ en (b); y aproximadamente cero en (c).

Las dimensiones del potencial eléctrico son las de trabajo entre carga. Entonces, las unidades en las que se expresará son joule/coulomb = J/C. Esta unidad recibe el nombre de volt y se le designa por el símbolo V.

2. Considérese una carga q colocada en el origen de un sistema coordenado. Considerense también dos puntos sobre uno de los ejes coordenados, por ejemplo el eje x. Se tomará el punto P_0 como punto de referencia. El punto P_1 será un punto arbitrario. Se desea determinar el potencial eléctrico del punto P_1. Para ello se usará la ecuación (5). Como el campo eléctrico producido por una carga puntual es conservativo, se tiene libertad de elegir como trayectoria de integración cualquier curva que una a los puntos P_0 y P_1. Conviene elegir la trayectoria que haga más simple el cálculo de la integral. En el presente caso la trayectoria más simple resulta ser el segmento rectilíneo que une ambos puntos ya que la dirección del campo eléctrico $\vec{E}(x)$ y la del vector elemento de línea $d\vec{r}$ son paralelas. Suponiendo que la carga q es positiva, $\vec{E}(x)$ y $d\vec{r}$ tienen sentidos opuestos, como muestra la figura. Entonces



$$\vec{E}(x) \cdot d\vec{r} = -E(x)\, dr.$$

Además, puesto que al recorrer la trayectoria de P_0 a P_1 la coordenada x del punto disminuye se tiene que $dr = -dx$. Luego

$$\vec{E}(x)\cdot d\vec{r} = E(x)\,dx$$

Sustituyendo en la ecuación (5) y recordando que

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{x^2}$$

se tiene

$$V(x_1) = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{x^2}\,dx = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}\right)$$

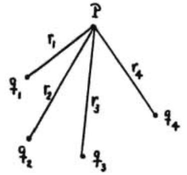
Es práctica común en esta situación considerar al punto de referencia P_0 situado en el infinito. Entonces $x_0 \rightarrow \infty$ y $1/x_0 \rightarrow 0$. Omitiendo el índice de P_1 y x_1, el potencial de el punto P situado a una distancia x de la carga puntual q está dado por

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{x}$$

El punto P no necesariamente debe estar sobre el eje x. Puede ser un punto cualquiera en el espacio. Designando por r la distancia de este punto a la carga q, el potencial asociado a tal punto será :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r} \tag{10}$$

Cuando se tiene un conjunto formado por dos o más cargas puntuales el potencial eléctrico en un punto P del espacio será igual a la suma de los potenciales producidos en ese punto por cada una de las cargas en ausencia de las demás. Sean q_1, q_2,..., las cargas puntuales y r_1, r_2,..., las distancias respectivas al punto P (ver la figura). El potencial en P debido a cada carga es



$$V_i(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}\ , \ i = 1,2, \ldots$$

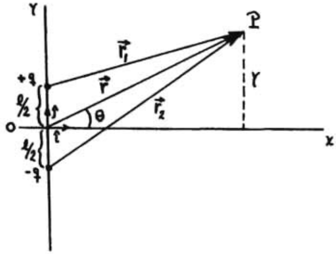
Este potencial está determinado por el valor de q_i y la distancia r_i y es independiente de la presencia de las otras cargas puntuales. La razón de esto es que el campo eléctrico generado por cada carga satisface el principio de superposición. De aquí se sigue que el potencial eléctrico total en P es la suma de los potenciales individuales

$$V_T(P) = V_1(P) + V_2(P) + \ldots$$

en forma abreviada

$$V_T(P) = \sum_i V_i(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \tag{11}$$

3. El dipolo eléctrico es un conjunto formado por dos cargas puntuales de igual magnitud y de signos opuestos, separadas por una cierta distancia. Considérese el arreglo mostrado en la figura



La magnitud de cada carga es q y la distancia de separación 1. El origen del sistema coordenado está a la mitad de la distancia entre las cargas. Se desea calcular el potencial total de un punto P cuya distancia al origen O es muy grande comparada con la separación entre las cargas, $r \gg 1$.

De acuerdo a la ecuación (11), el potencial total en P es

$$V_T(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad (12)$$

Las posiciones de las cargas están determinadas por los vectores $\frac{1}{2}\hat{j}$ y $-\frac{1}{2}\hat{j}$. El vector posición de P es $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$. De la figura se deduce que

$$\vec{r}_1 = x\hat{i} + (y - \tfrac{1}{2})\hat{j}$$

$$\vec{r}_2 = x\hat{i} + (y + \tfrac{1}{2})\hat{j}$$

Las magnitudes de estos vectores son

$$r_1 = (x^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2)^{1/2} = (r^2 + \tfrac{1^2}{4} - 1y)^{1/2}$$

$$r_2 = (x^2 + (y + \tfrac{1}{2})^2)^{1/2} = (r^2 + \tfrac{1^2}{4} + 1y)^{1/2}$$

y sus recíprocos se pueden escribir como sigue:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\frac{1^2}{4} - 1y}{r^2}\right)^{-1/2}$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\frac{1^2}{4} + 1y}{r^2}\right)^{-1/2}$$

Ahora bien, puesto que $1 \ll r$, en cada uno de los binomios mostrados arriba el segundo término resulta ser muy pequeño comparado con la unidad. Usando la aproximación de Bernoulli para binomios,

$(1+t)^n \approx 1 + nt$, los recíprocos de r_1 y r_2 pueden aproximarse por las siguientes expresiones:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{l^2}{4} - ly}{r^2}\right)\right)$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{l^2}{4} + ly}{r^2}\right)\right)$$

las cuales, al sustituirse en la ecuación (12), dan como resultado

$$V_T(P) \doteq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ly}{r^3}$$

Reemplazando y por r senθ(ver figura), el potencial en el punto P puede expresarse en función de las coordenadas polares de este punto:

$$V_T(P) = \frac{lq\ \text{sen}\theta}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}$$

Puesto que el producto lq es el momento del dipolo eléctrico p, se tiene

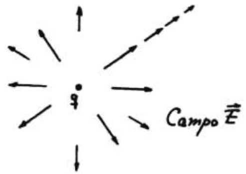
$$V_T(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\ \text{sen}\theta}{r^2} \qquad (13)$$

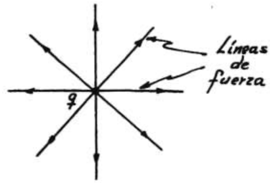
Obsérvese que este resultado es válido para cualquier punto del espacio y no sólo para aquellos del plano xy, porque si se efectúa una rotación del sistema alrededor del eje "y", el potencial dado por (13) permanece inalterado.

4. Conocemos la conexión entre V y $\vec{E}$ debido a la definición de V, es decir, sabemos que

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

pero nos podemos preguntar si existe alguna relación más sencilla entre V y $\vec{E}$. Para examinar esta posibilidad pensemos en el caso de una carga puntual q.



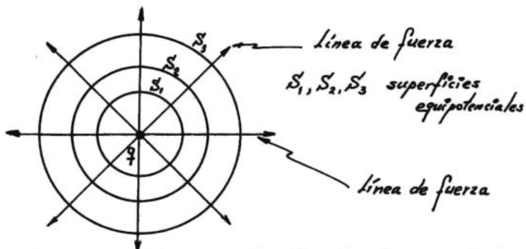


En este caso el potencial es, si el origen O esta en q

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \quad \frac{1}{r}$$

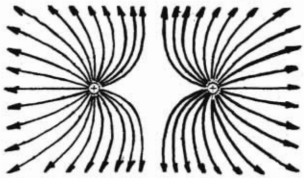
observemos que todos lo puntos con la misma r tienen el mismo V, así que todos los puntos de una esfera con centro en q tienen el mismo potencial.

Si graficamos estas superficies equipotenciales y las líneas de fuerza, tenemos



Observemos que en este caso existe una relación visual o geométrica muy sencilla entre las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales: son perpendiculares entre sí. ¿Qué pasaría con el $\vec{E}$ y V producido por dos cargas iguales?. En este caso

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \quad (\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2})$$



y los puntos P con el mismo potencial cumplen

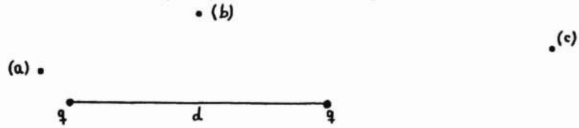
$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \text{cte}$$

hay tres casos importantes:

a) los P están muy cercanos a una de las cargas

b) los P no estan ni muy cercanos ni muy lejanos a las cargas

c) los P están muy lejanos a las cargas



en cada caso tenemos:

a) $r_1 \approx 0 \qquad r_2 \approx d \Longrightarrow \frac{1}{r_1} \gg \frac{1}{d} \approx \frac{1}{r_2}$

$$= \quad r_1 \approx \text{cte}$$

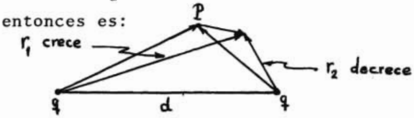
b) $r_1 \approx r_2 \Longrightarrow \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \text{cte} \approx \frac{2}{r_1} \Longrightarrow r_1 \approx \text{cte},\ r_2 \approx \text{cte}$

c) En este caso tenemos que ver que si

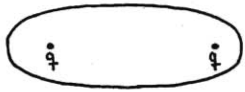
$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \text{cte}$$

entonces si r_1 crece obliga a r_2 a decrecer.

La única posibilidad entonces es:

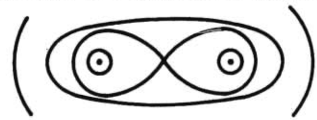


es decir más o menos las equipotenciales en éste caso son:

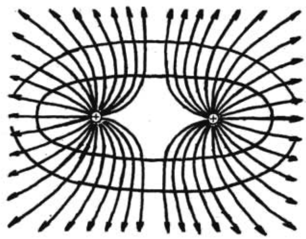


Nota: No son elipses

entonces cualitativamente las superficies equipotenciales son:

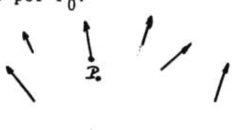


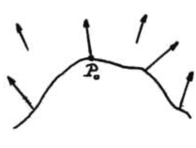
entonces comparando con la gráfica de las líneas de fuerza, vemos que en efecto, estas parecen ser perpendiculares a las superfi cies equipotenciales



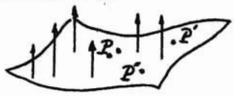
A continuación veremos rezonamientos generales y exactos que de mostrarán que esta conexión tan sencilla entre V y $\vec{E}$ se cumple para cualquier distribución de cargas, además veremos que $\vec{E}$ se puede calcular conociendo el campo V.

Dado el campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$ y un punto P_0, podemos encontrar una línea que sea perpendicular a $\vec{E}$ en todos sus puntos, y que pase por P_0.





el conjunto de todas estas líneas forman una superficie que pasa por P y es perpendicular a $\vec{E}$:



además la diferencia de potencial entre cualquiera dos puntos P' y P'' sobre esta superficie es cero, ya que escogiendo una trayectoria contenida en la supeficie

$$V'' - V' = -\int_{P'}^{P''} \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0,$$

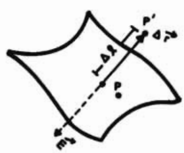
entonces toda la superficie tiene el mismo potencial V_0. Se le llama por eso, superficie equipotencial de potencial V_0. Conociendo el potencial como función de x, y y z podemos encontrar sus superficies equipotenciales por medio de la ecuación:

$$V(x, y, z) = V_0$$

Consideremos un punto P_0 sobre la superficie S equipotencial $V = V_0$. Si consideramos un punto P' muy cercano a P_0 con $\overrightarrow{P_0P'} = \Delta\vec{r}$, entonces

$$V' - V_0 = \Delta V \approx -\vec{E}\cdot\Delta\vec{r}$$

Es decir, ΔV disminuye en el sentido de $\vec{E}$ y aumenta en el sentido contrario a $\vec{E}$.



Si escogemos P' de tal manera que $\Delta \vec{r}$ apunte en la dirección perpendicular a S en que V aumenta, tenemos

$$\Delta V \approx + E \Delta l$$

ó sea

$$E = \frac{dV}{dl}$$

así que concluimos que:

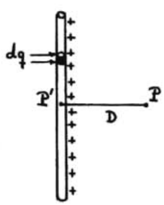
a) $\vec{E}$ "apunta" en la dirección en que V decrece.

b) La magnitud de $\vec{E}$ es el cambio de V por unidad de longitud en la dirección perpendicular a S en que V crece

Es decir, conociendo V en todo punto podemos, siguiendo éstas indicaciones, encontrar $\vec{E}$ en todo punto.

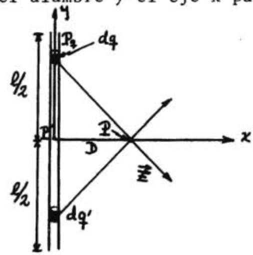
Estas ideas encuentran una aplicación interesante en el caso de conductores, porque sabemos que si no hay movimiento de cargas, $\vec{E}$ debe ser cero dentro del volumen del conductor y debe ser perpendicular en su superficie, así que necesariamente la superficie del conductor es equipotencial y su volúmen debe estar al mismo potencial que su superficie.

Consideremos un alambre recto uniformemente cargado con una distribución de carga   por unidad de longitud.



Nos interesa calcular el potencial eléctrico V en un punto P a una distancia D del alambre y tal que P' quede en la mitad de este último.

Podemos como primer paso escoger los ejes x e y tal que el eje y este a lo largo del alambre y el eje x pase por P.



Cada dq contribuye a el potencial en P, en una cantidad

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad \frac{dq}{P_q P}$$

entonces el potencial en P es simplemente la suma de todas éstas contribuciones:

$$V(P) = \int_{alambre} dV = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad \frac{\lambda\, dy}{\sqrt{y^2+D^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{dy}{\sqrt{y^2+D^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\, 2 \int_0^{\ell/2} \frac{dy}{\sqrt{y^2+D^2}}$$

en unas tablas de integrales encontramos:

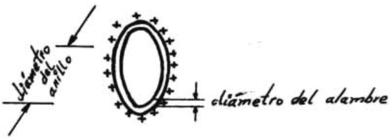
$$\int \frac{dy}{y^2+D^2} = \ln(y + \sqrt{y^2+D^2})$$

por lo que obtenemos que el potencial en P es:

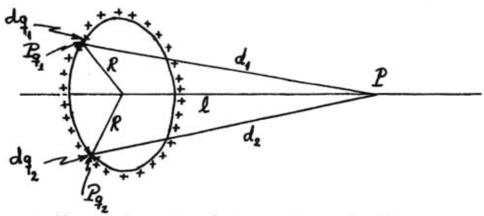
$$V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{2})^2+D^2}}{D} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1+\sqrt{1^2+4D^2}}{2D}$$

En general, el potencial debido a cualquier distribución lineal de carga se calcula sumando los dV producidos por cada dq. A continuación veremos otro ejemplo en el que también se aplica éste procedimiento para calcular el potencial.

Imaginemos que tenemos un alambre en forma de anillo cargado uniformemente.



En el caso en que el diámetro del alambre sea muy pequeño en comparación del diámetro del anillo, podemos calcular el potencial en todo punto sobre la normal central de manera muy sencilla



Cada dq contribuye al potencial en el punto P con una cantidad

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{dq}{|\overrightarrow{P_qP}|}$$

pero si nos fijamos en dos dq_1, y dq_2 arbitrarias, observamos que

$$d_1 = \sqrt{R^2+l^2}$$

$$d_2 = \sqrt{R^2+l^2}$$

así que $d_1 = d_2$, por lo que la distancia

$$\overline{P_qP} = \text{cte} = \sqrt{R^2 + 1^2}$$

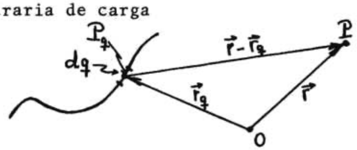
Sumando las contribuciones de todos los dq tenemos

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{anillo}} \frac{dq}{\overline{P_qP}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\;\frac{1}{\sqrt{R^2+1^2}}\int_{\text{anillo}} dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\;\frac{q_{T\ \text{anillo}}}{\sqrt{R^2+1^2}}$$

Si λ es la carga por unidad de longitud y es constante:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\;\frac{2\pi R\lambda}{\sqrt{R^2+1^2}} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\;\frac{R\lambda}{\sqrt{R^2+1^2}}$$

es muy fácil generalizar éstas ideas al caso de una distribución lineal arbitraria de carga



es claro que

$$V(P) = \int_{\substack{\text{curva}\\ \text{cargada}}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\;\frac{dq}{\overline{P_qP}}$$

pero

$\overline{P_qP} = |\vec{r} - \vec{r}_q|$, con $\vec{r}_q$ = vector posición de **dq**, entonces

$$V(P) = \int_{\substack{\text{curva}\\ \text{cargada}}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\;\frac{dq}{|\bar{r} - \bar{r}_q|}$$

Si la curva está uniformemente cargado con carga por unidad de longitud, la integral se reduce a:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \lambda \int_{\substack{\text{curva} \\ \text{cargada}}} \frac{dl'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

donde $\vec{r}\,'$ es el vector de posición del origen de coordenadas al elemento de carga y $\vec{r}$ el vector de posición del origen al punto P.

3.2 Problemas

01. ¿Podrán intersecarse dos superficies que se encuentran a diferentes potenciales?

02. Si $\overline{E}$ es igual a cero en un punto dado ¿deberá ser V también igual a cero?

03. Si V es constante en toda una región ¿ que podrá afirmarse de $\overline{E}$ en esa región?

04. Sea una carga puntual $q = 1.5\times10^{-8}$C. (a)¿Cuál es el radio de la superficie equipotencial de 30 V? (b)¿Están uniformemente separadas las superficies equipotenciales cuyo potencial difiere en 1 V?

05. (Figura 01) Sea una carga puntual $q = 1.0\times10^{-6}$C. Calcular en cada una de las situaciones ilustradas, la diferencia de potencial entre los puntos A y B.

06. La distancia entre dos cargas puntuales de $+2\times10^{-7}$C y $+3\times10^{-7}$ C es de 0.1m. Calcular el campo y potencial eléctricos en (a) el punto medio entre ellas, (b) un punto situado a 0.04m de la primera, sobre la recta que pasa por ellas pero fuera del segmento que las une, (c) un punto que dista 0.1 m de cada carga y (d) determinar un punto en el cual el campo eléctrico sea igual a cero.

07. Hallar lo pedido en el problema anterior si la segunda carga es de -3×10^{-7}C.

08. Dos cargas positivas de igual magnitud están colocadas en los puntos (0,-a) y (0,+a) en un sistema de coordenadas cartesianas. (a) Calcular el potencial en el origen. (b) Probar que el potencial en cualquier punto sobre el eje x está dado por

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

(c) Hacer una gráfica de este potencial en el intervalo (-5a,+5a) del eje x. (d) Calcular el campo eléctrico sobre el eje x. (e) Encontrar el punto sobre el eje x para el cual el valor del potencial es igual a la mitad de su valor en el origen.

09. (Figura 02) Demostrar que para $r \gg a$, el potencial V(r) para los puntos colocados sobre el eje vertical está dado por

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{2qa}{r^2}\right)$$

¿Era de esperarse este resultado? (Sugerencia: la configuración de cargas es la suma de una carga puntual y un dipolo).

10. Considere la distribución de cargas del problema 06. (a) Calcular el trabajo requerido para trasladar una carga de 4×10^{-7}C desde el punto indicado en (c) hasta el punto indicado en (d). ¿Es necesario especificar la trayectoria seguida?

11. Calcular la energía cinética en J y la velocidad en m/s que tiene un núcleo de carbono que, partiendo del reposo, pasa por una diferencia de potencial de 10^7 V.

12. (Figura 03) Verificar que para $r \gg a$, el potencial producido por la distribución de cargas es

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{2}\,p}{r^2}$$

donde p = 2aq.

13. (Figura 04) (a) localice los puntos sobre el eje x para los que V = 0. Considere solamente puntos del eje y, tómese d=1.0m.

14. (Figura 05) Elabore un diagrama cualitativo de las líneas de fuerza y de las intersecciones de las superficies equipotenciales con el plano de la figura.

15. (Figura 06) Determine E(P) y V(P) ¿Qué ocurre con E(P) y V(P)

al duplicar las distancias a y r y cuadruplicar la carga q?

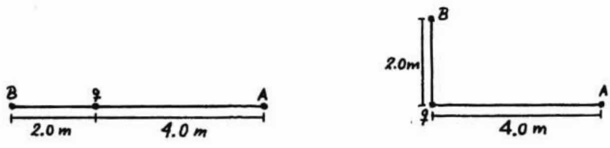


Figura 01

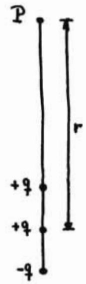


Figura 02

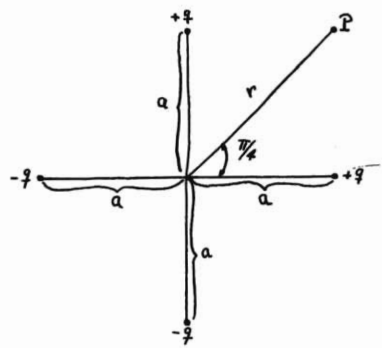


Figura 03

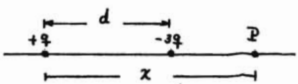


Figura 04

Figura 05

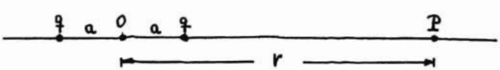


Figura 06

UNIDAD 4: FUERZA ELECTROMOTRIZ Y CIRCUITOS.

4.1 Leyes de Ohm y de Joule;

4.2 Circuitos y resistencias;

4.3 Problemas.

Preparó: Juan Quintanilla (4.1); Guillermo González y Ricardo Vázquez (4.2).

Referencias:

U Haber - Schaim, JB Cross, JH Dodge y JA Walter, PSSC Física, tercera edición, Editorial Reverté, 1975. Capítulos 20 y 21.

D Halliday y R Resnick, Fundamentos de Física, CECSA, México, 1978. Capítulos 27 y 28.

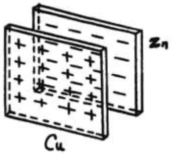
S Gartenhaus, Física, Interamericana, México, 1979. Capítulos 23 y 24.

4.1. Leyes de Ohm y de Joule.

1. Definir corriente eléctrica;
2. Definir densidad de corriente;
3. Proponer un modelo microscópico para la resistencia en los metales e interpretar la ley de Ohm;
4. Definir resistividad y conductividad; relacionar la densidad de corriente con la intensidad del campo eléctrico;
5. Derivar la ley de Joule;

1. El efectuar la transición de la electrostática al estudio de cargas en movimiento, es razonable el preguntarnos si hay o no fenómenos asociados con el movimiento de cargas que no se hayan presentado cuando las cargas estan en reposo. La respuesta es afirmativa y el propósito es iniciar el estudio de los fenómenos que se presentan cuando se tienen cargas en movimiento. Un primer fenómeno consiste en la aparición de un campo magnético. Un segundo fenómeno asociado con cargas en movimiento a través de un conductor es la resistencia que las cargas experimentan en su movimiento y que disipa su energía en forma de calor. Por otro lado, cuando las cargas estan aceleradas pueden radiar energía. De estos tres fenómenos, el más sencillo de tratar es el correspondiente a la disipación de energía en una resistencia. Para esto, es importante el introducir una serie de ideas básicas tales como la corriente eléctrica y la dirección en que fluye.

Para introducir la idea de corriente eléctrica consideremos el dispositivo que se muestra en la figura adjunta, que consiste de dos placas metálicas, separadas por una distancia de unos cuantos centímetros. El espacio entre las placas está lleno de aire. Es

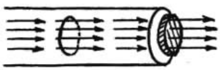


inmediato reconocer que es una situa ción estática, ya que, independiente mente de que hay un campo eléctrico entre las placas, el aire presente entre las placas no es conductor ba jo condiciones normales. En cambio los metales son conductores: al conectar las placas cargadas por medio de un alambre, las car gas de una de las placas se moverán a lo largo del alambre y neu tralizarán las de la otra placa. Esto origina una serie de pregun tas: "¿Cuáles son las cargas que se mueven a lo largo del alambre? En otras palabras ¿Son las cargas positivas o las negativas las que se mueven?. Por ejemplo, si fijamos la atención sobre la pla ca cargada positivamente, tan pronto colocamos el alambre, obser varemos que la carga positiva disminuye rápidamente y se hace ce ro; lo mismo pasa con la placa cargada negativamente ¿Qué podemos conluir de estas observaciones? Quizás, y en semejanza a lo que ocurrió a los primeros investigadores en el campo de la electrici dad, la falta de evidencia conclusiva y definitiva nos lleve a pensar que la carga positiva dejo la placa correspondiente, pasó por el alambre, y neutralizó la carga negativa de la otra pla ca. Aunque esta explicación es plausible, es incorrecta: sabemos que las cargas positivas están ligadas más o menos fuertemente a la estructura cristalina del metal y que los electrones de valen cia se mueven libremente. De esto podemos concluir que la corrien te es transportada en un conductor metálico por el movimiento de electrones. Sin embargo, la primera interpretación se empleó mucho tiempo antes de que se encontrara que era incorrecta. Resulta mucho más conveniente usarla como convención que cambiarla. De aqui que nos referiremos a la corriente convencional en un conductor metálico como a una procesión de cargas positivas moviéndose a traves del conductor y nos ajustaremos a esta práctica. En el caso de líquidos y gases, tanto las cargas positivas y como las negativas (iones) se mueven en direcciones opuestas y la corriente estará dada por la carga total transferida por segundo. En tal caso, la corriente total estará dada por

$$I_{total} = I_{positiva} + I_{negativa}$$

Otro punto que debemos notar con respecto a la corriente, está en el hecho de que la corriente que fluye a lo largo del alambre que conecta a las placas cargadas sólo lo hace durante un intervalo de tiempo muy corto, esto es, tenemos una corriente transitoria, ya que las cargas de una placa rápidamente neutralizan las de la otra. Tales corrientes no son útiles para muchos de nuestros propósitos, por lo que sería necesario procurarnos algún medio adecuado que nos permita reponer las cargas sobre las placas con la misma rapidez con la que son neutralizadas por la corriente que fluye a lo largo del alambre y de esta menera hacer que la corriente permanezca constante en el tiempo. Esto puede ser realizado si conectamos, por ejemplo, una bateria a las placas metálicas, etc. Más adelante tendremos oportunidad de analizar este punto; por el momento nos conformaremos con saber que esto puede ser logrado. Lo importante para nosotros, es que la corriente permanece la misma en el tiempo y este tipo de corriente la llamaremos corriente directa estacionaria.

Es conveniente mencionar explícitamente dos de las característi cas de la corriente que deseamos producir en el alambre:
Primera: debe ser directa, esto es, debe fluir en una sola dirección;
Segunda: una vez producida no debe cambiar en el tiempo;
Es importante aclarar este punto ya que hay otros tipos de corriente. Por ejemplo, la corriente alterna que tiene la característica de que su magnitud y dirección varían en una forma preestablecida.
Una vez definida la dirección de una corriente estacionaria directa, definamos su magnitud como la cantidad de carga eléctrica que pasa a través de una sección transversal del conductor por segundo tal y como se muestra en la figura siguiente. De la definición es inmediato expresar la corriente en la forma:

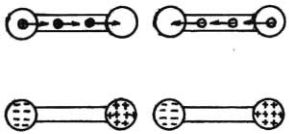


$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{1}$$

en donde ΔQ es la carga total que cruza la sección durante el tiempo Δt y es medida en coulomb, Δt en segundos y la corriente I en ampere.
De la expresión (1) se observa que si la corriente varía en el tiempo, entonces podemos hablar del valor instantáneo de la corriente y escribir

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

De la definición de la corriente, es claro que ambos tipos de cargas en movimiento (positivas y negativas) constribuyen a la corriente en la misma dirección. De la figura siguiente puede inferirse que ya sea que las cargas positivas se muevan hacia la derecha o las negativas hacia la izquierda, el resultado neto es el mismo. El conductor del lado izquierdo resulta más negativo, el del lado derecho más positivo.



De aquí es claro que ambos tipos de carga contribuyen al fluyo de corriente en el mismo sentido, y por convención éste será el de la carga positiva. En el caso de conductores metálicos, los portadores de la carga son electrones. En cambio, en un electrolito, por ejemplo, sal disuelta en agua, la corriente, proviene del movimiento de ambos tipos de carga.

Hasta este punto hemos hablado de un tipo de corriente, la debida al movimiento de los electrones. A esta se le suele llamar corriente de conducción. Hay otros tipos de corriente y entre ellas se encuentran las llamadas corrientes de convección, las que son el resultado de un transporte neto de masa.

Ejemplo 1. Supongamos que a la entrada de un teatro, el público forma una cola que tiene 8 metros de ancho y que hay una persona cada 4 metros cuadrados de pavimento. La cola avanza con una rapidez de 12 metros por minuto. Determinar cuántas personas entran al teatro por minuto.

En tanto que se están moviendo con una velocidad de 12 metros/minuto, entonces en el primer minuto habrán de cruzar todas las personas que se encuentren dentro de los primeros 12 metros a partir de la puerta. En vista de esto, el número de metros cuadrados que alcanzarán a cruzar la puerta en un minuto serán $12m \times 8m = 96m^2$. Tomando en cuenta que hay una persona cada $4m^2$, o sea, 0.25 personas/m^2 entonces el número de personas que cruzan la puerta por mi

nuto será $(96m^2/min)(0.25\ personas/m^2) = 24$ personas/min.
Del ejemplo es claro que si la cola fuese más compacta, esto es, si el número de personas por unidad de área fuese mayor entonces el número de personas que pasan por la puerta en un minuto será mayor. De aquí se desprende que cuanto mayor sea el número de electrones disponibles para conducir tanto mayor podrá ser la corriente que pasa a través de una superficie.

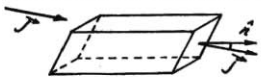
2. Para tomar en cuenta este aspecto. es conveniente pensar en términos del número de portadores de carga por unidad de volumen. Denotemos por n_e a esta cantidad y supongamos que solo hay electrones en la región, esto es, sólo se tiene una especie de portador de carga. Ahora bien, entre las placas existe un campo eléctrico, y si las cargas se encuentran en dicha región, experimentarán una fuerza y un cierto estado de movimiento común.
Este movimiento común consistirá en el efecto producido por el campo, el cual afecta a todos los electrones de la misma manera, y resultará en un estado de movimiento ordenado con una velocidad para los electrones a la cual llamaremos velocidad de arrastre.
Como veremos más adelante, esta velocidad de arrastre es en realidad una velocidad promedio.
Designando por $\vec{v}_a$ a la velocidad de arrastre, tendremos que el producto

$$e n_e \vec{v}_a \tag{2}$$

tendrá las dimensiones de carga por unidad de área y por unidad de tiempo. En otras palabras esta corresponderá a lo que llamaremos densidad de corriente. El producto en_e tendrá las dimensiones de una densidad de carga y claramente $\rho = en_e$. De aquí que

$$\vec{j} = en_e\vec{v}_a = \rho\vec{v}_a \qquad (2')$$

Obsérvese que la carga de los electrones es negativa y por lo tanto $\vec{j}$ apuntará en el sentido opuesto a la velocidad de arrastre. Para ver más claramente el significado físico de $\vec{j}$, consideremos la situación para cargas positivas en movimiento. En este caso $\vec{j}$ y $\vec{v}_a$ tienen el mismo sentido. Supongamos que $\vec{j}$ es constante, esto es, es la misma en todos los puntos de la región de interés. Imaginemos un área A cuya normal forma un ángulo β con dirección de $\vec{j}$. De la figura siguiente, es claro que todas las cargas en la región del prisma rectangular de longitud $\Delta l = |\vec{v}_a|\,\Delta t$ cruzarán la superficie de área A en el tiempo Δt.



La carga ΔQ que pasará a través de A en el tiempo Δt será

$$\Delta Q = \rho A \Delta l\cos\beta = \rho\,|\vec{v}_a| A\,\Delta t\cos\beta = \rho A\vec{v}_a.\hat{n}\,\Delta t = A(\vec{j}.\hat{n})\,\Delta t \qquad (3)$$

y, por lo tanto, la contribución a la corriente I será:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = (\vec{j}.\hat{n})\ A$$

de donde es claro que la carga que pasa a través de A por unidad de tiempo es igual al producto del área A por la componente normal de la densidad de corriente. De lo anterior es claro que la corriente I esta definida si especificamos el área A y la dirección de la normal $\hat{n}$ para la cual consideramos que I es positiva. Ahora bien, el resultado (3) ha sido obtenido para cargas positivas en movimiento y es igualmente correcto para cargas negativas y la densidad de corriente fluirá en la dirección opuesta a la indicada en la figura precedente y, por lo tanto

$$(\vec{j}.n) = |\vec{j}|\cos \quad = -|\vec{j}|\cos$$

puesto que $\beta' = \pi - \beta$ y $\cos\beta' = \cos(\pi - \beta) = -\cos\beta$. Por otra parte la carga que fluye a través de A es negativa y por tanto:

$$-\frac{|\Delta Q|}{\Delta t} = -|\vec{j}|A\cos\beta \qquad (4)$$

la cual es idéntica a la expresión (3). Así una carga positiva moviéndose de izquierda a derecha es equivalente a una carga negativa moviéndose de derecha a izquierda y ambas contribuyen a la corriente en el mismo sentido. Esto es, desde el punto de vista macroscópico no hay manera de distinguir si el flujo es debido a cargas positivas o a cargas negativas.

De la ecuación (2') podemos observar que la densidad de corriente depende el número de portadores de carga por unidad de volumen, n_e, y de la velocidad de arrastre, $\vec{v}_a$. Ahora bien, es inmediato reconocer que n_e esta directamente relacionado con las propiedades del material bajo consideración, esto es, con la estructura interna de medio material. De la misma manera, la velocidad v_a dependerá de la estructura del medio material y de la diferencia de potencial aplicada. Todas estas afirmaciones serán más claras cuando intentemos establecer la relación entre la velocidad de arrastre y las propiedades intrínsecas del material, esto es, cuando establezcamos un modelo de la conducción en materiales. Por el momento consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. En un alambre de cobre fluye una corriente de 1 ampere. La sección transversal del alambre es de 1 mm^2. ¿Cuál es la velocidad promedio de los electrones en el alambre de cobre? Suponga que la densidad de corriente es la misma en todos los puntos del alambre, esto es, la densidad de corriente es uniforme. Con objeto de resolver el problema, es necesario conocer la den sidad de electrones libres. En el cobre, se sabe que en promedio hay un electrón libre por cada átomo de material. Puesto que la densidad del cobre es $\sigma_{cobre} = 9x10^3 kg/m^3$ y que el número de Avogadro tiene el valor de $N_0 = 6.02 \times 10^{23}$ átomos/mol, entonces la densidad de electrones será:

$$n_e = \sigma_{Cu} No/P.A.$$

donde P.A. = 63.5 es el peso atómico del cobre, lo que implica que en 63.5 kg de cobre habrá $6.02x10^{26}$ átomos. Sustituyendo en la ecuación para la densidad de electrones tendremos:

$n_e = (9 \times 10^3\ kg/m^3)(6.02 \times 10^{26}\ atomos/63.5\ kg) = 8.5 \times 10^{28}$ electrones/m^3.

y la densidad de carga electrónica es igual a la densidad electrónica por la carga por electrón, esto es:

$$\rho_e = n_e(-e) = (8.5x10^{28}\ electrones/m^3)(-1.6x10^{-19}\ C/electrón)$$
$$= -1.36 \times 10^{10}\ C/m^3$$

La densidad de corriente es el producto de la densidad de carga eléctronica por la velocidad de arrastre v_a, es decir:

$$j = |\vec{j}| = \rho_e |\langle\vec{v}_a\rangle| = |\rho_e|\ v_a$$

A partir de la ecuación (3) es inmediato que:

$$I = jA = |\rho_e|\ Av_a$$

Despejando a v_a y sustituyendo los valores númericos, tendremos

$$v_a = \frac{I}{|\rho_e|\ A} = \frac{I\ A}{(1.36 \times 10^{10}\ \frac{C}{m^3})\ (10^{-6}\ m^2)} = \frac{1\ C/s}{(1.36 \times 10^4)\ \frac{C}{m}}$$

$$= 0.73 \times 10^{-4} m/s.$$

Es de notarse el valor tan pequeño para la velocidad de arrastre. En otras palabras, los electrones libres en un alambre conductor

se mueven con velocidades que son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Entonces, algo debe oponerse a que los electrones del material adquieran grandes velocidades bajo el efecto de una diferencia de potencial o un campo eléctrico externo en comparación con las obtenidas en ausencia de medio material.
Esta última consideración nos indica que el responsable de las velocidades tan pequeñas deberá ser el medio material y como los electrones se mueven más o menos libremente, entonces deberán perder la energía que adquieren en virtud del campo eléctrico y la única posibilidad que se vislumbra es que la pierdan por colisiones con los átomos del alambre. De hecho así ocurre, y por el principio de la conservación de la energía, la pérdida de energía cinética de los electrones habrá que manifestarse en algún tipo de energía en el medio material. Pero hay que preguntarse: ¿qué o cuál tipo de energía?. Tomando en cuenta que los átomos del material se encuentran más o menos rígidamente atados a sus posiciones de equilibrio en el medio, es natural concluir que los átomos absorberán la energía pérdida por los electrones y al estar sujetos a las fuerzas intermoleculares dentro del material ampliarán sus movimientos alrededor de posiciones de equilibrio estable. La ampliación de estos movimientos originará que los electrones libres en el metal sufran colisiones con los átomos más frecuentemente y con ello recorran distancias más pequeñas y por tanto se vean imposibilitados de adquirir grandes velocidades bajo el efecto de la diferencia de potencial o del campo eléctrico externo.
Es la tremenda cantidad de electrones libres por unidad de volumen, la responsable de que podamos contar con corrientes tan gran

des como un ampere y aún más grandes, como las que frecuentemente se envían a través de las líneas de corriente eléctrica. Desde el punto de vista electrostático, un ampere es una corriente muy grande ya que implica el paso de un coulomb por segundo a través de una sección del alambre, mientras que una carga estática de 10^{-6} coulomb es relativamente grande.
Sin embargo, es importante notar que el establecer una corriente en un alambre no implica la separación de cargas positivas y negativas, cosa que en el caso estático si es necesario. En un alambre los electrones libres se mueven libremente entre los iones positivos constituidos por los átomos que han contribuido a que estén presentes los electrones libres en el alambre. En vista de lo anterior, el alambre no porta carga neta alguna.

3. El hecho de que al cerrar el switch en un circuito aparezca casi instantáneamente una corriente en todos los puntos del mismo hace pensar que los electrones viajan a velocidades muy grandes en el conductor. De hecho, en la sección anterior hemos afirmado que tal cosa no ocurre y que los electrones viajan con velocidades relativamente pequeñas, unos cuantos cm/s. Pero si esto es correcto, cómo nos explicamos el hecho de que al encender el switch el cuarto se ilumine casi instantáneamente. Lo que pasa es que al cerrar el circuito aparece un campo eléctrico, el cual se propaga casi instantáneamente a lo largo del alambre y cada electrón libre experimenta una fuerza que de inmediato lo pone en movimiento y por esto habrán electrones pasando a través de cada sección del alambre, independientemente de que ellos viajen muy

lentamente.

Ahora bien, los electrones libres en ausencia de campo eléctrico no están en reposo, sino que se mueven con velocidades del orden de 10^6 m/s. Sin embargo, estos movimientos son totalmente desordenados, o al azar, y, consecuentemente no contribuye a un transporte neto de carga. Podemos imaginar que este movimiento anárquico es consecuencia de choques elásticos, choques que también son al azar, entre los electrones y los iones positivos.

Considerando uno de estos choques al azar y el inmediato posterior habrá de transcurrir un cierto tiempo entre dos choques sucesivos.

Como el movimiento es al azar, no hay razón alguna para pensar que el intervalo de tiempo sea el mismo para todos los choques; por el contrario, es de esperarse que sean diferentes y de hecho una distribución de intervalos de tiempo. En lugar de pensar en cada intervalo individual, pensemos en el tiempo medio entre dos choques y la distancia media recorrida entre dos choques, a las cuales llamaremos tiempo libre medio y recorrido libre medio. Notemos que la terminología e ideas son semejantes a las empleadas en la discusión del movimiento de moléculas en gases. Siendo las trayectorias al azar, es de esperar que al aplicar un campo eléctrico estas se deflecten en la dirección del campo si la carga es positiva y en la dirección opuesta si es negativa. La deflexión será el resultado de la aceleración de las cargas entre choques. Podemos suponer que la energía cinética adquirida por los electrones a través del campo eléctrico es transferida a los iones en cada uno de los choques. Ahora bien, el efecto del campo

eléctrico que tiene importancia para la conducción es la velocidad de arrastre y con esto es conveniente relacionarla a la aceleración producida por el campo eléctrico exterior.
Durante cada recorrido libre, el campo eléctrico produce una aceleración uniforme en la dirección de la fuerza, $\vec{F} = e\vec{E}$. En cada choque se transfiere el exceso de energía cinética adquirida por efecto del campo eléctrico externo, reduciendo a cero la velocidad acumulada por efecto del campo externo, después de lo cual la aceleración provoca un aumento gradual de la velocidad hasta que se presenta un nuevo choque. De aquí es claro que la velocidad adquirida entre choques sucesivos no es la misma siempre, por lo que la velocidad de arrastre es la media temporal de este movimiento, superpuesto al movimiento al azar.
Hemos dicho que la velocidad al azar es mucho mayor que la velocidad de arrastre y, consecuentemente, el tiempo medio entre colisiones será independiente del campo aplicado. De esto es inmediato concluir que el único factor que afecta a la velocidad de arrastre es la aceleración debida al campo aplicado. Recordando que la intensidad de corriente es proporcional a la velocidad de arrastre, podemos concluir que la corriente será proporcional al campo aplicado, esto es:

$$I \propto E \tag{5}$$

que es el resultado que emplearemos para interpretar la ley de Ohm. Es inmediato darse cuenta que la corriente es proporcional a la fuerza ejercida por el campo eléctrico y que el efecto de los choques es el de oponerse a la libre propagación de los electrones en el medio, en otras palabras, presentan resistencia al flujo de la corriente.

Consideremos un conductor metálico de sección transversal constante y longitud L. Al aplicar una diferencia de potencial V entre los extremos del conductor aparecerá un campo eléctrico uniforme E = V/L. Sustituyendo en (5)

$$I \propto V \tag{6}$$

Podemos escribir

$$V = IR \tag{7}$$

donde R es la constante de proporcionalidad a la que llamaremos resistencia. Si expresamos la diferencia de potencial en volt y la corriente en ampere, la resistencia estará dada en volt/ampere a lo que llamaremos ohm.

4. Habiendo introducido la constante de proporcionalidad entre corriente y diferencia de potencial, consideremos los parámetros de los que puede depender. En particular, si esta representa la oposición al paso de la corriente en el material, es de esperarse que dependa de las propiedades del material. De lo anterior sabemos que la velocidad de arrastre dependerá de las propiedades de los electrones de conducción en el metal y para relacionarlos emplearemos conceptos tales como recorrido libre medio y tiempo libre medio. La velocidad de arrastre, esto es, la velocidad media habrá de ser calculada. Para ello supongamos que 2τ es el tiempo medio entre choques. Entonces:

$$V = a(2\tau)$$

será la velocidad acumulada al término del tiempo 2τ y la velocidad media será la mitad de la velocidad máxima adquirida en este intervalo de tiempo, ya que en la colisión previa cedió toda su energía cinética adquirida vía el campo. Entonces

$$v_a = \frac{1}{2} v = \frac{1}{2} a(2\tau)$$

Ahora bien, la fuerza ejercida es F = eE = ma, donde m es la masa del electrón. Despejando la aceleración a y sustituyendo en la expresión para la velocidad de arrastre tendremos:

$$v_a = \frac{1}{2} \frac{eE \quad 2\tau}{m} = \frac{eE\tau}{m} \qquad (8)$$

Sustituyendo E por V/L en (8) y el resultado a su vez en (3), tenemos finalmente

$$I = \frac{n_e e^2 A \tau}{mL} V$$

lo que nos conduce a

$$R = \frac{m}{n_e e^2 \tau} \frac{L}{A} = \eta \frac{L}{A} \qquad (9)$$

La magnitud η definida por la ecuación (9) se llama resistividad y equivale a la resistencia que presenta un conductor de longitud unidad y sección transversal unidad.

Siendo L expresada en metros y A en metros cuadrados, es inmediato notar que:

$$\eta = \frac{m}{n_e e^2 \tau} \qquad (10)$$

tendrá que estar expresada en ohm-m.

En tanto que la resistividad η, representa la resistencia por unidad de longitud y por unidad de área, es inmediato concluir que su inverso representará la facilidad con que se puede establecer una corriente y por ello la llamamos conductividad y se define co mo

$$\sigma = \frac{1}{\eta} = \frac{n_e e^2 \tau}{m} \tag{11}$$

dada en $(\text{ohm-m})^{-1}$.

Observando las cantidades η y σ vemos que estas sólo dependerán del comportamiento y número de electrones de conducción y no de la geometría o forma del conductor. En cambio, la resistencia del conductor dependerá de la geometría o forma del conductor, tal y como lo muestra la ecuación (9). La resistencia R será muy diferente para una placa cuadrada, para una barra o para una placa en forma de rondana. Ahora bien, el valor de la resistividad para un material dado no será siempre el mismo, ya que dependerá de otros parámetros. Podrá depender de la temperatura, de la pureza del material, imperfecciones de la estructura del material, estado de tensión del material (tensiones mecánicas), etc.

En la tabla siguiente se muestra la resistividad de algunos metales a 20°C:

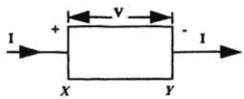
Metal	Resistividad
	η (ohm-m)
Cobre Cu	1.7×10^{-8}
Aluminio Al	2.8×10^{-8}
Plata Ag	1.6×10^{-8}
Oro Au	2.4×10^{-8}
Bronce	$\approx 7 \times 10^{-8}$

Sustituyendo (8) en (2') y en el resultado la expresión (11) para la conductividad, tendremos que:

$$\frac{n_e e^2 \tau}{m}\vec{E} = \sigma\vec{E} = \vec{j} \qquad (12)$$

la cual es equivalente a la ley de Ohm (ecuación 7), sólo que esta forma de la ley de Ohm es de carácter microscópico. Esto es, nos da la relación entre la densidad de corriente y el campo eléctrico en cada punto del medio conductor. En cambio, V = IR da la intensidad de la corriente total a través de un cuerpo finito de resistencia R, al que se aplica una diferencia de potencial V.

5. Cuando pasa corriente por una resistencia, la energía eléctrica se transforma en energía térmica. La energía disipada en la resistencia se convierte en calor y el proceso es inmediato de comprender en términos de nuestras consideraciones anteriores. Sabemos que los electrones son acelerados por el campo aplicado, pero están perdiendo continuamente la energía en exceso por sus choques con los iones positivos. Esto aumenta la energía de las vibraciones térmicas de los iones de la red. Al principio, las colisiones incrementan la temperatura del conductor y despúes de un cierto intervalo de tiempo, si el conductor no se funde, se alcanza una condición de equilibrio en la que el conductor es capaz de disipar el calor a sus alrededores con la misma rapidez con la que se genera. Consideremos un sistema eléctrico XY (constituido por un elemento o un grupo de elementos) por el que pasa una corriente I cuando se ha aplicado una diferencia de potencial V. Al pasar la



corriente, se habrá de transportar una carga ΔQ de X a Y y se realizará un trabajo ΔW. Este trabajo será realizado por el campo eléctrico y será igual a la pérdida de energía de la carga con - forme decrece su potencial eléctrico, esto es

$$\Delta W = V\Delta Q$$

La energía será transformada en calor, trabajo mecánico, energía química, luz, etc. en el sistema. Teniendo en cuenta que $I = \Delta Q/\Delta t$ tendremos que

$$\Delta W = V\Delta Q = VI\,\Delta t$$

y la rapidez de disipación de energía sería

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = VI$$

En el caso especial de que el circuirto satisfaga la ley de Ohm, $V = RI$ la potencia disipada será:

$$P = VI = I^2R = V^2/R$$

Esta relación fue descubierta experimentalmente por James Joule cuando se encontraba estudiando el equivalente mecánico del calor y es conocida bajo el nombre de la ley de Joule.

Entonces, si Q es la energía total calorífica que es producida en una resistencia en un intervalo de tiempo t, la potencia eléctrica promedio disipada será:

$$P = \frac{Q}{t} = I^2R$$

De aquí es claro que para mentener la corriente en un circuito habrá que proporcionar una fuente de energía y que el calor generado será el del circuito incluyendo la fuente misma.

Ejemplo 4. Un calentador eléctrico tiene una resistencia de 220Ω y porta una corriente de 2.0 ampere durante 3 horas.

(a) ¿Cuál es el calor producido? (b) Si la energía eléctrica cues ta 0.50 pesos/kWh, ¿Cuál es el costo del calor?

(a) $Q = I^2Rt = (2.0A)^2(220\Omega)(3.0h)(3600s/h) = 9.5x10^6J$

(b) $9.5x10^6J = (9.5x10^6\ )(3.6x10^6J/KWh)^{-1} = 2.64kWh$

de donde el costo será igual a: (2.64 kWh)(.5 pesos/kWh) = 1.320 pesos.

4.2. Circuitos y resistencias.

1. Definir fuerza electromotriz (emf);
2. Derivar la segunda regla de Kirchhoff;
3. Derivar la primera regla de Kirchhoff;
4. Resolver circuitos eléctricos con emf y resistencias.

1. Es un hecho bien conocido que cuando se conecta una batería a un conductor para formar un camino cerrado o circuito, se establece una corriente eléctrica en ese circuito. El movimiento de cargas en el conductor se logra porque la batería es capaz de producir una ddp entre los extremos del conductor. Una batería es un ejemplo de fuente de fuerza electromotriz. Se define tal fuente como un dispositivo que puede producir y mantener una ddp entre los puntos a los que se le conecte. Simbólicamente se representa la fuente de fuerza electromotriz como muestra la fig. 1. Por convención de supone que el punto señalado con signo + se encuentra elevado a un potencial mayor que el punto marcado con -. Si la

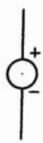


Figura 1.

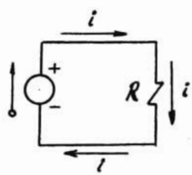


Figura 2.

fuente se conecta a un circuito, como muestra la fig.2, se establece una corriente eléctrica. Si los portadores de carga puestos en movimiento son positivos, estos se trasladarán en el circuito exterior a la fuente, del punto de más alto al punto de más bajo potencial.

Entonces la corriente tendrá el sentido indicado en la figura. A la fuerza electromotriz de la fuente se le asocia un sentido indicado por una flecha con un pequeño círculo en la cola. Este es el sentido en que se establece una corriente de cargas positivas si la fuente actuara sola; es decir, si en el circuito externo no estuviera presente ningun otro elemento (se dice que la fuente está en "cortocircuito"). Dentro de la fuente los portadores de carga positivos son llevados del punto de menor al punto de mayor potencial. Para lograr esto, debe hacerse trabajo sobre los portadores a costa de la energía de la fuente. Una fuente de fuerza electromotriz se caracteriza porque siempre hay en su interior una conversión a energía eléctrica de algún otro tipo de energía. Si la fuente es una batería química, la ddp entre sus extremos es mantenida mediante una reacción de ciertos elementos, y hay una transformación de energía química en eléctrica. En los generadores eléctricos, la ddp entre sus terminales es producida por el movimiento de conductores en campos magnéticos, habiendo una transformación de energía mecánica en eléctrica.

Se define la fuerza electromotriz (fem) como el trabajo por unidad de carga realizado por la fuente para llevar los portadores de carga positivos de la terminal de menor potencial a la de mayor potencial. Representando a la fem por la letra griega $\mathcal{E}$.

$$\mathcal{E} = \frac{dW}{dq} \tag{1}$$

La unidad (mks) de fem es el joule/coulomb = volt. Así, si una fuente (ideal) tiene una fem de 5 volts, es capaz de proporcionar una ddp de 5 volts entre los puntos a los que esté conectada. En realidad, las fuentes utilizadas en la práctica proporcionan una ddp ligeramente menor que la fem asociada. Esto se debe a que en toda fuente real hay presente una pequeña resistencia que forma parte inseparable del dispositivo. La presencia de esta resistencia interna se pone de manifiesto en el hecho, fácilmente observable en la práctica, de que cuando la fuente está suministrando una ddp y se produce una corriente eléctrica en un circuito formado por una resistencia externa, no sólo esta resistencia emite calor por efecto Joule. La fuente misma se calienta, lo cual indica que hay una disipación de calor interna. Tal emisión de calor sólo es atribuible a la presencia de una resistencia dentro de la fuente.- Esta resistencia interna produce una caida de potencial dentro de la fuente misma, como se mostrará más adelante.

2. Cuando la fuente de fem es una pila o batería química, es costumbre representarla con el símbolo mostrado en la fig.3. Por simplicidad, supondremos en lo que sigue que la fem de las fuentes es constante y que, por lo tanto, las corrientes que se establezcan en los circuitos bajo estudio son estacionarias.

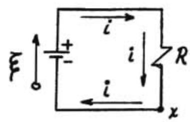


Figura 3.

También supondremos por el momento que la fuente es ideal. En el circuito de la figura 3. una corriente de intensidad i circula en todo punto del circuito. Entonces, en un intervalo de tiempo dt, una cantidad de carga $dq = idt$ atraviesa cada sección del circuito. La fuente de fem hace trabajo para mover esta carga. Por la ec.(1) la rapidez con que se realiza trabajo es

$$\frac{dW}{dt} = \xi\frac{dq}{dt} = \xi i$$

En el mismo intervalo de tiempo una cantidad de energía se disipa en forma de calor en la resistencia R (efecto Joule). La rapidez con que la energía es disipada está dada por la ecuación

$$\frac{dQ}{dt} = i^2R$$

Como no hay ningún otro tipo de conversión de energía más que los dos mencionados arriba, por el principio de conservación de la energía la rapidez conque la fuente hace trabajo para mover la carga debe ser igual a la rapidez con que aparece calor en la resistencia: $\xi i = i^2R$. Luego, la corriente en el circuito tiene intensidad

$$i = \frac{\xi}{R} \qquad (2)$$

Supongamos ahora que la fuente es real. Una resistencia r estará presente dentro de la fuente. Representamos esta resistencia como un elemento conectado en línea con la fuente (fig.4). El efecto de la resistencia interna, como se mencionó antes, es producir una disipación de energía en forma de calor en la propia fuente. Al tomar en cuenta esta transformación adicional en el balance de la energía, es fácil verificar que la ecuación resultante ahora es

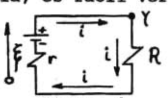


Figura 4.

$$\xi i = i^2R + i^2r,$$

de donde

$$i = \frac{\xi}{R + r} \qquad (3)$$

La corriente circulante tiene una intensidad menor que en el caso de la fuente ideal. En muchos casos la resistencia interna tiene un valor despreciable comparada con la resistencia externa R. Entonces se puede omitir el término r y la ec. (3) llega a coincidir con la ec. (2).

Las ecuaciones (2) y (3) se pueden deducir de una manera alternativa teniendo en cuenta que el potencial eléctrico en cualquier punto del circuito debe tener valor único. Efectuemos un recorrido a lo largo del circuito partiendo de algún punto, como por ej. el X en la fig. 3, y regresando al mismo punto. Llamemos V_x al potencial asociado a ese punto y sumémosle algebráicamente todos los cambios de potencial encontrados en el recorrido. Como el potencial en cada punto tiene un valor único, al regresar al punto X debemos encontrar el mismo potencial V_x. En la fig.3 hagamos el recorrido en el sentido de las manecillas del reloj. Al pasar por la fuente en el sentido de la fem asignada, encontramos que las cargas positivas son forzadas a moverse de un punto de bajo potencial a un punto de alto potencial. El resultado es que las cargas experimentan un cambio de potencial de valor $+\xi$. Continuando el recorrido llegamos a la resistencia R. Las cargas se mueven de un punto de alto potencial a un punto de bajo potencial. El cambio de potencial que experimentan es, por lo tanto, $-Ri$. Llegamos así al punto de partida, X. Si al potencial de este punto sumamos algebráicamente todos los cambios de potencial, debemos obtener como resultado el mismo potencial V_x:

$$V_x + \xi - iR = V_x$$

Esta ecuación puede simplificarse para obtener

$$\xi - iR = 0 \qquad (4)$$

Se observará que el resultado no depende del valor del potencial asignado al punto X. Tampoco depende del punto X: se puede comenzar el recorrido desde cualquier otro punto y se obtendrá la misma ecuación. Obsérvese que la ecuación (4) es completamente equivalen te a la ecuación (2) y lo cual se debe, en última instancia, a que el concepto de potencial está definido en base a los conceptos de trabajo y de energía.

La ecuación (4) muestra que cuando se recorre un camino cerrado o circuito la suma algebráica de los cambios de potencial es cero. Se conoce este resultado como segunda regla de Kirchhoff o teorema de la trayectoria y, por lo dicho anteriormente, no es más que un enunciado del principio de conservación de la energía aplicado a circuito eléctricos.

En el caso del circuito con la fuente real (fig. 4), la aplicación de la segunda regla de Kirchhoff produce el resultado siguiente: Elijamos el punto y como punto de partida. Sea V_y su potencial y efectuemos el recorrido del circuito en el sentido de las manecillas del reloj. Al atravesar la resistencia externa R encontramos una caída de potencial -iR. Al pasar la fuente tenemos otra caída de potencial -ir, debida a la resistencia interna, y una elevación de potencial de magnitud $+\xi$ debida a la fem de la fuente. Entonces se obtiene la ecuación

$$V_y - iR - ir + \xi = V_y,$$

o sea,

$$- iR - ir + \xi = 0 \qquad (5)$$

que es equivalente a la ecuación (3), obtenida esta última aplicando el principio de la conservación de la energía.

Es importante hacer notar que el teorema de la trayectoria es aplicable a cualquier tipo de circuito aún cuando existan dos o más fuentes de fem (ideales o no) y dos o más resistencias externas. Es aplicable aún en el caso en que el circuito sea o no simple, como se verá más adelante.

3. Consideremos el circuito mostrado en la fig. 5. Por simplicidad supongamos que la fuente es ideal. Cuando dos elementos resistores están unidos en fila uno a continuación del otro, tal como las resistencias R_1 y R_2, se dice que están conectados en serie. Nos planteamos la siguiente cuestión: ¿bajo que condiciones son equivalentes los circuitos de las figs. 5 y 6 ?

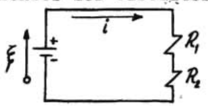


Figura 5.

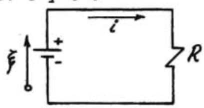


Figura 6.

Más concretamente, ¿qué valor debe tener la resistencia R tal que la corriente circulante en ambos circuitos tenga la misma intensidad? Para responder a esta cuestión, apliquemos el teorema de la trayectoria al circuito de la fig. 5. Recorriendo el camino en el sentido de las manecillas del reloj tenemos:

$$+\xi - iR_1 - iR_2 = 0$$

Despejando la corriente:

$$i = \frac{\xi}{R_1 + R_2}$$

Si procedemos de manera análoga con el circuito de la fig. 6, obtenemos

$$i = \frac{\xi}{R}$$

Combinando estas dos ecuaciones, la relación entre R, R_1 y R_2 es simplemente

$$R = R_1 + R_2$$

Como extensión de este resultado es fácil verificar que, si se tiene un conjunto de n resistores conectados en serie, la resistencia equivalente es

$$R = R_1 + R_2 \ldots\ldots + R_n$$

En una conexión en serie la resistencia equivalente es mayor que la de cualquiera de los elementos.

Antes de obtener un resultado para resistencias en paralelo, vamos a enunciar la primera regla de Kirchhoff. Se llama nodo a un punto de un circuito en el que convergen tres o más conductores que transportan corriente eléctrica. En la fig. 7 los puntos a y b son nodos del circuito. La corriente i entra en el nodo a y se divide en dos corrientes, i_1 e i_2 que abandonan el mismo nodo. Si la corriente es estacionaria, la carga no puede crearse ni desaparecer espontáneamente en el punto a. Por lo tanto, la carga debe abandonar el nodo a con la misma rapidez con que entra en él (un razonamiento parecido se puede usar para el nodo b). Si por convención asociamos signo + a una corriente que entra en un nodo y signo - a una que sale, podemos escribir para el nodo a la siguiente ecuación:

$$+ i - i_1 - i_2 = 0 \tag{6}$$

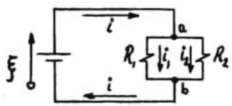


Figura 7.

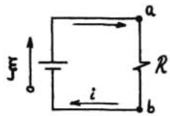


Figura 8.

Esta ecuación expresa el hecho de que la suma algebráica de las corrientes en un nodo debe ser cero. Tal resultado es conocido como la primera regla de Kirchhoff o teorema del nodo y, por lo dicho antes, no es más que un enunciado del principio de conservación de la carga. Como el teorema de la trayectoria, el teorema del nodo es aplicable a cualquier tipo de circuito.

Procedamos ahora a estudiar las resistencias en paralelo. Queremos averiguar bajo qué condiciones son equivalentes los circuitos de las figs. 7 y 8. ¿Qué valor debe tener R para que al reemplazar a las resistencias R_1 y R_2 produzca el mismo efecto? Observemos primeramente que la ddp a la que están sometidas las resistencias R_1 y R_2 en la fig. 7 y R en la fig. 8 es la misma. Si la fuente es ideal, esta ddp tiene el valor de la fem ($V_{ab} = \xi$). Para el circuito de la fig. 8 se verifica la relación

$$i = \frac{\xi}{R}$$

Aplicando la ley de Ohm a R_1 y R_2 tenemos:

$$i_1 = \frac{V_{ab}}{R_1} = \frac{\xi}{R_1} \; , \; i_2 = \frac{V_{ab}}{R_2} = \frac{\xi}{R_2} \; .$$

Sustituyendo todas estas ecuaciones en la (6), obtenemos la relación entre R, R_1 y R_2:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Si se tiene un conjunto de n resistencias conectadas en paralelo, la resistencia equivalente es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \cdots + \frac{1}{Rn}$$

Se observará que la resistencia equivalente de una conexión paralelo es menor que la de cualquiera de los elementos.

4. Llamamos red eléctrica a una combinación cualquiera de resistencias y fuerzas electromotrices como la mostrada en la fig. 9. Una malla es un circuito simple que forma parte de una red. En la fig. 9 tenemos dos mallas: XYVZX y ZVWUZ. Tenemos también dos nodos: Z y V. Estos nodos unen a las tres ramas ZXYV, ZV y ZUWV.

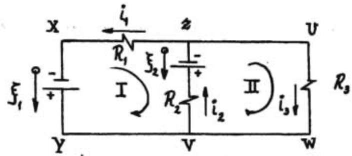


Figura 9.

Usualmente el problema de resolver una red consiste en encontrar las intensidades de las corrientes que circulan por las diversas ramas, suponiendo conocidas las resistencias y las fems. Al resolver problemas de circuitos y redes mediante las reglas de Kirchhoff conviene tener presentes las siguientes convenciones:

(i) Si una resistencia es recorrida en el sentido de la corriente el cambio de potencial es -iR; en el caso contrario es +iR (fig. 10).

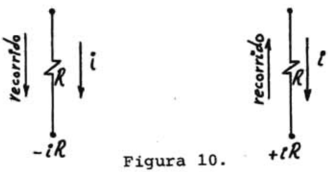


Figura 10.

(ii) Si una fuente es recorrida en el sentido de la fem, el cambio de potencial es $+\xi$; en el caso contrario es $-\xi$ (fig. 11)

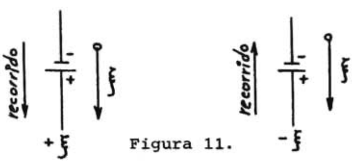


Figura 11.

(iii) Una corriente entrando a un nodo se considera positiva. Si abandona el nodo se considera negativa.

Como primer paso para resolver una red es necesario especificar claramente los sentidos de las fems. Como siguiente paso, se asignan sentidos a las corrientes de las diversas ramas de la red. Los sentidos pueden ser elegidos arbitrariamente; es decir pueden coincidir o no con los sentidos reales de circulación de las corrientes. Cuando a una corriente se le haya asociado de antemano sentido opuesto al que realmente tiene este hecho será mostrado automáticamente al resolver las ecuaciones de la red, ya que en la solución final el valor númerico de esa corriente estará precedida de un signo menos. El tercer paso en la solución consiste en asignar sentidos de recorrido a las mallas que forman la red. La elección de estos sentidos también es arbitraria. En la red de la fig. 9 se han especificado los sentidos de las fems; se han asignado sentidos arbitrarios a las corrientes. Por simplicidad, las mallas se han denotado con los números romanos I y II. Los recorridos de estas mallas se han escogido arbitrariamente en el sentido de las manecillas del reloj, aplicando el teorema de la trayectoria a las mallas tenemos las siguientes ecuaciones:

Malla I: $-\xi_1 + i_1R_1 + \xi_2 + i_2R_2 = 0.$

Malla II: $-i_2R_2 - \xi_2 - i_3R_3 = 0.$

Para el nodo Z, la primera regla de Kirchhoff proporciona la siguiente ecuación:

$$-i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

Tenemos tres incógnitas: i_1, i_2, i_3. Este sistema de tres ecuaciones debe ser suficiente para determinar las corrientes. Resolviéndolo obtenemos:

$$i_1 = \frac{-R_3 \xi_2 + (R_2 + R_3) \xi_1}{\Delta},$$

$$i_2 = \frac{-(R_1 + R_3) \xi_2 + R_3 \xi_1}{\Delta},$$

$$i_3 = \frac{- \xi_2 R_1 - \xi_1 R_2}{\Delta},$$

donde

$$\Delta = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3$$

Obsérvese en la tercera de estas ecuaciones que, sin importar los valores de las fems y las resistencias, el valor numérico de i_3 estará precedido de un signo menos, lo cual significa que el sentido real de circulación es contrario al que le asignamos previamente.

4.3 Problemas

01. Determine la potencia eléctrica disipada por un dispositivo que porta una corriente estacionaria de 0.50 A cuando este es conectado directamente a una fuente de potencia de 110 V.

02. Si un motor eléctrico desarrolla 0.45 hp y su eficiencia es del 90%, determine la corriente que fluye a través del circuito cuando es directamente colocada a una fuente de potencia de 120 V.

03. Una burbuja luminosa tiene una resistencia de 80Ω y porta una corriente de 1.2 A durante 8 horas. (a) Determinar la potencia disipada. Si el kilowatt hora cuesta 0.50 pesos (b) ¿Cuál es el costo de mantenerlo encendido las 8 horas?

04. Para prepararse una taza de café, un estudiante emplea un calentador de resistencia para calentar 1 kg de agua a una temperatura inicial de 20°C al punto de ebullición. La resistencia del calentador es de 200Ω y porta una corriente promedio de 2.0 A. Si sólo se comunica al agua un 50% del calor total, ¿Que tanto tiempo le tomará llevar al punto de ebullición al agua?

05. Una diferencia de potencial de 60 V mantiene una corriente de 2×10^{-1} A en un conductor metálico. Determinar la corriente en el conductor cuando se triplica la diferencia de potencial.

06. Una diferencia de potencial de 110 V da lugar a una corriente de 2.5 A en el filamento metálico de un calentador. Determinar (a) la resistencia del filamento. (b) la diferencia de potencial necesaria para mantener una corriente de 3.5 A.

07. Determinar la resistencia eléctrica de un alambre de plata a 20°C si su longitud es de 30 m y su diámetro es de 1,5 mm.

08. Determinar la resistividad de un alambre de 50.0 m de largo y diametro de 0.8 mm y cuya resistencia de 2.50 Ω.

09. ¿Cuál es la longitud de un alambre de cobre de 1.4×10^{-5} m de diámetro si su resistencia es de 20Ω a 0°C?

10. Determinar la resistencia eléctrica de un objeto en el que se produce una corriente de 20 mA bajo una diferencia de potencial de 30 V.

11. Determinar la corriente eléctrica promedio cuando fluyen:
(a) 5.0×10^{-6} C de carga positiva y 3.0×10^{-6} C de carga negativa en direcciones opuestas y en un punto fijo durante 2.0×10^{-3} s.
(b) 5.0×10^{18} electrones durante 2.0×10^{-3}s.

12. (Figura 01) Cuántos coulomb de electricidad pasan a través de un circuito, si la corriente varía en el tiempo de acuerdo a la gráfica de la figura?

13. Si se transportan 10 C de electricidad de un punto a otro de un circuito donde el potencial es 20 V más bajo que en el punto inicial y el tiempo requerido es de 2 s; (a) ¿Qué tanta energía es empleada, (b) ¿Qué tantos electrones habrán pasado a través de una sección transversal cualquiera en 2 s?. (c) ¿Cuál es la resistencia entre estos puntos?

14. Dos alambres A y B poseen las siguientes condiciones: la longitud del alambre B es la mitad del A, el diámetro de B es 2/3 del de A, ¿Cuál es la relación entre sus resistencias?

15. Cuando fluyen 4 A a través de una cierta resistencia se disipan 80 W. ¿Cuál es el trabajo requerido para transportar cada coulomb a través de la resistencia?

16. ¿Depende el sentido de la fem proporcionada por una batería del sentido de la corriente que pasa por la batería?

17. Discutir detalladamente la afirmación de que para la resolución de circuitos el método de la energía y el método del teorema de mallas son perfectamente equivalentes.

18. Frotando un peine con un trozo de lana es posible generar una diferencia de potencial de 10 000 V ¿Por qué no resulta peligroso este alto voltaje, si un voltaje mucho menor suministrado por una toma eléctrica ordinaria es muy peligroso?

19. ¿Cuál es la diferencia entre la fem y la diferencia de potencial?

20. Una batería de 6.0 V establece una corriente de 5.0 A en un circuito externo durante un minuto. ¿En cuánto se reduce la energía química de la batería?

21. Una batería de automóvil de 12 V tiene una carga inicial de 120 A-h. Suponiendo que el potencial a través de las terminales permanece constante hasta que la batería se descarga totalmente ¿Durante cuántas horas puede suministrar una potencia de 200 W?

22. En un circuito simple circula una corriente de 5.0 A. Cuando se añade una resistencia de 2.0Ω en serie, la corriente decae a 4.0 A. ¿Cuál era la resistencia original del circuito?

23. (Figura 02) Demostrar que la potencia suministrada en R por efecto Joule, en el circuito de la figura, es un máximo cuando R es igual a la resistencia interna r de la batería. Demostrar que esta potencia máxima es $P = \mathcal{E}^2/4r$.

24. Una resistencia de 0.10Ω debe generar calor con un ritmo de 10 W al conectarse a una batería cuya fem es 1.5 V. (a) ¿Cuál es la resistencia interna de la batería? (b) ¿Cuál es la diferencia de potencial que existe a través de la resistencia?

25. Una bombilla eléctrica diseñada para consumir una potencia de 100 W al conectarse a una fuente de 100 V, se conecta a una fuente de 50 V. ¿Cuál es la potencia que consume?

26. (Figura 03) Una porción del circuito AB absorbe una potencia de 50 W y, a través de él, circula una corriente 1.0 A en la dirección mostrada. La resistencia R es de 2Ω. (a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre A y B? (b) ¿Cuál es la fem del elemento C, suponiendo que no tiene resistencia interna? (c) ¿Cuál es la polaridad de C?

27. Una batería cuya fem es de 2.0 V y cuya resistencia interna es de 1.0 Ω se utiliza para mover a un motor que sube un peso de 2.0 N con una rapidez constante de 0.50 m/s. Suponiendo que no existen pérdidas de potencia, determinar (a) la corriente en el circuito y (b) la caída de potencial a través de las terminales del motor.

28. Dos resistencias R_1 y R_2 pueden conectarse en serie o en paralelo a través de una batería (sin resistencia interna) cuya fem es $\mathcal{E}$. Se desea que la energía de Joule para la combinación en paralelo sea cinco veces mayor que para la combinación en serie.

Si R_1 es igual a 100 Ω, ¿Cuál debe ser el valor de R_2?

29. (Figura 04) (a) ¿Cuál es la resistencia equivalente de la red mostrada? (b) ¿Cuáles son las corrientes en cada una de las resistencias? Supóngase que $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = R_3 = 50\Omega$ y $\xi = 6.0$ V.

30. (Figura 05) ¿Qué potencia aparece como energía Joule en R_1, R_2 y R_3? (b) ¿Cuál es la potencia suministrada por ξ_1 y ξ_2? (c) Discutir el balance de energía del circuito. Suponer que $\xi_1 = 3.0$ V, $\xi_2 = 1.0$ V, $R_1 = 5.0\Omega$, $R_2 = 2.0\Omega$ y $R_3 = 4.0\Omega$.

31. (Figura 06) Se cuenta con dos baterías cuya fem es ξ y cuya resistencia interna es r. Estas baterías pueden conectarse en serie, o en paralelo y se utilizan para suministrar corriente a una resistencia R, como se muestra en la figura (a) Encontrar una expresión de la corriente en R en ambas conexiones. (b) ¿Cuál de las conexiones produce la mayor corriente si $R > r$ y si $R < r$?

32. (Figura 07) Cuál es la lectura de la corriente en el medidor M expresada en función de ξ y R?

33. (Figura 08) ¿Cuál es la resistencia equivalente entre los puntos terminales x e y de los circuitos mostrados? Supóngase que el valor de cada resistencia es de 10 Ω.

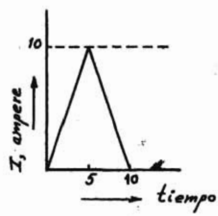


Figura 01

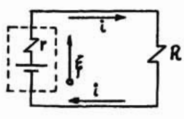


Figura 02

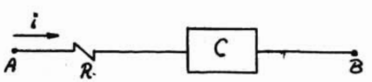


Figura 03

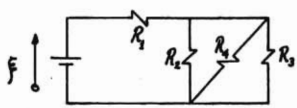


Figura 04

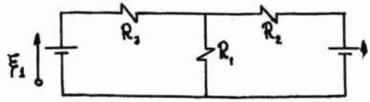


Figura 05

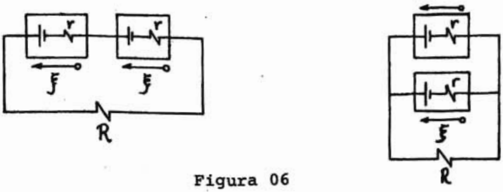


Figura 06

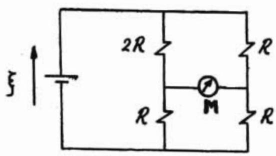


Figura 07

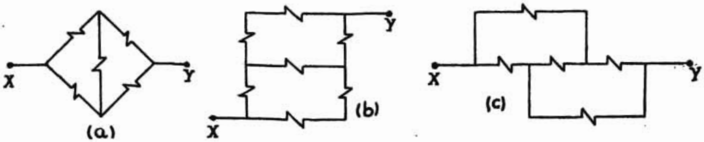


Figura 08

Energías mecánica y eléctrica
Se terminó de imprimir
en el mes de julio del año 2004
en los talleres de la Sección
de Impresión y Reproducción de la
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

La edición estuvo
a cargo de la
Secciónde Producción
y Distribución Editoriales

Se imprimieron
200 ejemplares
más sobrantes para reposición.

30 AÑOS

...transformando el diálogo por la razón

ENERGIAS MECANICA Y ELECTRICA
MEDINA • SECCION DE IMPRESION
35349 $ 19.00

ISBN: 970-654-675-8
978-97065-46753

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas
Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales

Ciencias